Prof.Dr.B.Grabowski e-mail: grabowski@htw-saarland.de Tel.: 5867-424
Lösungen zu Übung 9

Eigenschaften von Determinanten

Zu Aufgabe 1

Berechnen Sie den Rang und die Determinante folgender Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Wir wenden den Gausschen Algorithmus zur Bestimmung der Determinante von A an:

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l} Z1<->Z4 \\ \\ \\ \\ \end{array} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ Z2-2*Z1 \\ Z4-4*Z1 \end{array}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ Z4+2*Z2 \end{array} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 3 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ Z4-10*Z3 \end{array}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= -1\cdot 1\cdot 1\cdot 3$$

$$= -3$$

Wir können aus der letzten Matrix auch den Rang ablesen: rg(A) = 4.

Zu Aufgabe 2

Gegeben seien 3 Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ mit $\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = 7$.

Berechnen Sie die Determinante der 3 Vektoren:

$$\vec{b}_1 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \quad \vec{b}_2 = \vec{a}_2 + \vec{a}_3, \quad \vec{b}_3 = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_3$$

Lösung:

$$\det(\vec{b}_1, \quad \vec{b}_2, \quad \vec{b}_3)$$

$$= \det(2\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \vec{a}_2 + \vec{a}_3, 2\vec{a}_1 + \vec{a}_3)$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\det(\vec{a}_1,\vec{a}_2+\vec{a}_3,2\vec{a}_1+\vec{a}_3)-\det(-\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,2\vec{a}_1+\vec{a}_3)\\
&= 2\det(\vec{a}_1,\vec{a}_2,2\vec{a}_1+\vec{a}_3)+2\det(\vec{a}_1,\vec{a}_3,2\vec{a}_1+\vec{a}_3)-\det(-\vec{a}_2,\vec{a}_2,2\vec{a}_1+\vec{a}_3)-\det(-\vec{a}_2,\vec{a}_3,2\vec{a}_1+\vec{a}_3)\\
&= 4\det(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_1)+2\det(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)+4\det(\vec{a}_1,\vec{a}_3,\vec{a}_1)+2\det(\vec{a}_1,\vec{a}_3,\vec{a}_3)-0\\
&\qquad +2\det(\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_1)+\det(\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_3)\\
&= 0+2\det(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)+0+0-0+2\det(\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_1)+0\\
&= 2\det(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)+2\det(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)\\
&= 28
\end{aligned}
$$

Homogene Gleichungssysteme, Gausscher Algorithmus

Zu Aufgabe 3

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gausschen Algorithmus die jeweilige Lösungsmenge folgender Gleichungssysteme!
Geben Sie im Falle der Lösbarkeit des GS die Lösungsmenge als Vektorraum an und geben Sie die Dimension und die Basis an!

a) $\begin{array}{l} x_1+x_2-x_3=0\\ -2x_1+x_3=0\\ 5x_1-x_2+2x_3=0\\ 2x_1+6x_2-3x_3=0 \end{array}$ b) $\begin{array}{l} -2x_1=-x_2-x_3\\ x_1-2x_2=-x_3\\ x_1+x_2=2x_3 \end{array}$ c) $\begin{array}{l} x_1+2x_2=2x_3\\ 2x_1=-3x_2\\ 2x_1+x_2+8x_3=0 \end{array}$

Lösung:
Zu a)

$$
\begin{array}{l} x_1+x_2-x_3=0\\ -2x_1+x_3=0\\ 5x_1-x_2+2x_3=0\\ 2x_1+6x_2-3x_3=0 \end{array}
\quad\Leftrightarrow\quad
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 1\\ 5 & -1 & 2\\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix} * \vec{x} = \vec{0}
$$

Mittels Gaus'schem Algorithmus diagonalisieren wir das Gleichungssystem (GS).

(***Bemerkung:*** die rechte Seite des Gleichungssystems ist $\vec{b}=\vec{0}$. Deshalb können wir bei der Matrix (A|$\vec{b}$) $\vec{b}$ weglassen, also nur die Koeffizientenmatrix A betrachten, da diese Spalte $\vec{b}$ immer gleich $\vec{0}$ bleibt, egal, welche Operation des Gausschen Algorithmus wir anwenden).

$$
A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 1\\ 5 & -1 & 2\\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ Z2+2Z1\\ Z3-5Z1\\ Z2-2Z1 \end{array}
\rightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & -6 & 7\\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ Z2+2Z1\\ Z3+3Z2\\ Z4-2Z2 \end{array}
\rightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ \\ Z4-Z3/4 \end{array}
$$

$$
\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A*
$$

Prof.Dr.B.Grabowski e-mail: grabowski@htw-saarland.de Tel.: 5867-424
Lösungen zu Übung 9

Das o.g. GS können wir also äquivalent durch folgende Diagonalgestalt darstellen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 & x_3 &= 0 \\ 2x_2 - x_3 &= 0 \;\Rightarrow & x_2 &= 0 \\ 4x_3 &= 0 & x_1 &= 0 \end{aligned}$$

> Hier ist Rg (A*) = 3=n, wobei n=3 die Anzahl der Unbekannten ist.
> Das GS hat demzufolge genau eine Lösung und zwar die sogenannte triviale Lösung
> $\vec{x} = \vec{0}$

D.h., die Lösungsmenge des GS ist folgender Vektorraum der Dimension 0:
L= { $\vec{0}$}

Zu b)

$$\begin{aligned} &1.)\; -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ &2.)\; x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ &3.)\; x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} * \vec{x} = \vec{0}$$

Mittels Gaus'schem Algorithmus diagonalisieren wir das GS.

(***Bemerkung:*** die rechte Seite des Gleichungssystems ist $\vec{b} = \vec{0}$. Deshalb können wir bei der Matrix (A|$\vec{b}$) $\vec{b}$ weglassen, also nur die Koeffizientenmatrix A betrachten, da diese Spalte $\vec{b}$ immer gleich $\vec{0}$ bleibt, egal, welche Operation des Gausschen Algorithmus wir anwenden).

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} Z1 \leftrightarrow Z3 \\ \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ Z2 - Z1 \rightarrow \\ Z3 + 2Z1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ Z3 + Z2 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^*$$

$\Rightarrow$ es gibt unendlich viele Lösungen.

> Hier ist Rg (A*) = 2 < n, wobei n=3 die Anzahl der Unbekannten ist.
> Das GS hat folglich unendlich viele Lösungen.
> Die Dimension des Lösungsraumes (= Lösungsmenge) ist d=n - Rg(A*) =1 (= Anzahl der frei wählbaren Unbekannten).
> Da es ein homogenes GS ($\vec{b} = \vec{0}$) ist, ist der Lösungsraum ein ***Vektorraum*** der Dimension d=1.

Lösung des GS:

Prof.Dr.B.Grabowski e-mail: grabowski@htw-saarland.de Tel.: 5867-424
Lösungen zu Übung 9

Das GS hat die Diagonalgestalt: $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -3x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Wir haben 2 Gleichungen und 2 Unbekannte, d.h., eine Unbekannte, wir wählen x3, können wir beliebig wählen. Anschließend lösen wir die beiden Gleichungen von unten nach oben nach x_1 und x_2 auf. Wir erhalten:

$x_3 = \lambda$.
$x_2 = \lambda$
$x_1 = \lambda$

D.h., die Lösungsmenge des GS ist folgender Vektorraum der Dimension 1:

L= { $\vec{x} \mid \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in$ R }. Basisvektor= $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Zu c)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 2x_3 \\ 2x_1 &= -3x_2 \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} * \vec{x} = \vec{0}$$

Mittels Gaus'schem Algorithmus diagonalisieren wir das GS.

(***Bemerkung:*** die rechte Seite des Gleichungssystems ist $\vec{b} = \vec{0}$. Deshalb können wir bei der Matrix (A|$\vec{b}$) $\vec{b}$ weglassen, also nur die Koeffizientenmatrix A betrachten, da diese Spalte $\vec{b}$ immer gleich $\vec{0}$ bleibt, egal, welche Operation des Gausschen Algorithmus wir anwenden).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ Z2 - 2Z1 \\ Z3 - 2Z1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 12 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ Z3 + 3Z2 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix} = A^*$$

Das o.g. GS haben wir also äquivalent in die folgende Diagonalgestalt überführt:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 24x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_3 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

Hier ist Rg (A*) = 3=n, wobei n=3 die Anzahl der Unbekannten ist. Das GS hat dann genau eine Lösung und zwar die sogenannte triviale Lösung $\vec{x} = \vec{0}$

D.h., die Lösungsmenge des GS ist L= $\{\vec{0}\}$.

Prof.Dr.B.Grabowski e-mail: grabowski@htw-saarland.de Tel.: 5867-424
Lösungen zu Übung 9

Zu Aufgabe 4

$$ax_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + ax_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 + ax_3 = 0$$

Für welche $a \in$ R ist dieses GS

a) eindeutig
b) mehrdeutig
c) Geben Sie im Falle der eindeutigen Lösbarkeit die Lösung an!

Lösung:
Das Gleichungssystem

$$ax_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + ax_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 + ax_3 = 0$$

ist äquivalent zur Matrix $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, auf die wir den Gausschen Algorithmus anwenden.

(***Bemerkung:*** die rechte Seite des Gleichungssystems ist $\vec{b} = \vec{0}$. Deshalb können wir bei der Matrix (A|$\vec{b}$) $\vec{b}$ weglassen, also nur die Koeffizientenmatrix A betrachten, da diese Spalte $\vec{b}$ immer gleich $\vec{0}$ bleibt, egal, welche Operation des Gausschen Algorithmus wir anwenden).

Gausscher Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \underset{\substack{Vertauschen \\ der Spalten \\ 1\,und\,3}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ Z2 - Z1 \rightarrow \\ Z3 - aZ1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ Z3 + Z2 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{pmatrix}$$

Lösbarkeitsbedingungen:

Zu a) eindeutig lösbar, falls rg(A) = rg(A|$\vec{b}$) = 3, also falls det(A)≠0. Dazu müssen alle Diagonalelemente der Matrix ≠0 sein.
D.h., eindeutig lösbar ⇔ $a-1 \neq 0 \wedge -a^2-a+2 \neq 0$.
Die Lösung der Gleichung $-a^2-a+2 = 0$ ergibt:

$$a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow a_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

D.h., das GS ist eindeutig lösbar, falls gilt: a ≠ 1 $\wedge\ a \neq -2$

Zu b) Wir untersuchen nun die anderen Fälle:

Fall a=1:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fall a=-2:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mehrdeutige Lösbarkeit:
Das GS ist mehrdeutig lösbar, falls rg(A) < 3.
Der Lösungsraum ist ein Vektorraum der Dimension n – rg(A).

Für a=1 ist rg(A) = 1< 3, d.h. das GS ist für a = 1 mehrdeutig lösbar!
Der Lösungsraum ist ein Vektorraum der Dimension 2.

Für a= -2 ist rg(A) =2<3, d.h. das GS ist für a = -2 mehrdeutig lösbar!
Der Lösungsraum ist ein Vektorraum der Dimension 1.

Zu c)
Im Falle der eindeutigen Lösung gibt es nur die triviale Lösung, d.h. die Lösungsmenge des GS ist L= $\{\vec{0}\}$.

Inhomogene Gleichungssysteme, Gausscher Algorithmus

Zu Aufgabe 5
Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus!

a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & 8 & 8 & -4 \\ 4 & 2 & -16 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -13 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 9 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 50 \end{pmatrix}$

Hinweis: Wenden Sie den GA auf die Matrix $(A \mid \vec{b})$ an, die das GS $A\vec{x} = \vec{b}$ charakterisiert:

Prof.Dr.B.Grabowski e-mail: grabowski@htw-saarland.de Tel.: 5867-424
Lösungen zu Übung 9

Lösung:

<u>Zu a)</u>

Wir formen das Gleichungssystem durch Anwendung des GA äquivalent in Diagonalgestalt um:

$$(A\,|\,\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 4 & 2 & -16 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \end{array}\right) \quad \text{Zeilen vertauschen:}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ 4 & 2 & -16 & 10 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ Z3+4Z1 \\ Z4+2Z1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 34 & 16 & -6 & -52 \\ 0 & 21 & 15 & -8 & -27 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ Z3-34Z2 \\ Z4-21Z2 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -18 & 130 & -18 \\ 0 & 0 & -6 & 76 & -6 \end{array}\right) \quad 3.Z \text{ und } 4.Z \text{ vertauschen und halbieren}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 38 & -3 \\ 0 & 0 & -9 & 65 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ Z4-3Z3 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 38 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -49 & 0 \end{array}\right)$$

Demzufolge erhalten wir die folgende Diagonalgestalt und die Lösungen:

$$-49x_4 = 0 \Rightarrow x_4 = 0$$
$$-3x_3 = -3 \Rightarrow x_3 = 1$$
$$x_2 + 1 = -1 \Rightarrow x_2 = -2$$
$$-x_1 - 16 + 8 = -13 \Rightarrow x_1 = 5$$

<u>Zu b)</u>

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 9 & 11 & 50 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ Z3-2Z1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & 17 & 40 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ Z3-5Z2 \end{array}$$

Prof.Dr.B.Grabowski e-mail: grabowski@htw-saarland.de Tel.: 5867-424

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 22 & 0 \end{array}\right) = (A^* \,|\, \vec{b}^{\,*})$$

Demzufolge erhalten wir die folgende Diagonalgestalt und die Lösungen:

$$22x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$$
$$x_2 = 8$$
$$x_1 + 16 = 5 \Rightarrow x_1 = -11$$

Zu Aufgabe 6

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gausschen Algorithmus die jeweilige Lösungsmenge folgender Gleichungssysteme! Geben Sie im Falle der Lösbarkeit des GS die Lösungsmenge als affinen Raum an und geben Sie die Dimension, die Basis und den Aufpunkt an!

a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= x_3 + 2 \\ -2x_1 &= -x_3 - 2 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 5 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 2x_3 + 7 \\ 2x_1 &= -3x_2 \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 + 28 &= 0 \end{aligned}$$

Lösung:

Zu a)

$$\begin{aligned} &1.)\, x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ &2.)\, -2x_1 + x_3 = -2 \\ &3.)\, 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ &4.)\, 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 5 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix} * \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Mittels Gaus'schem Algorithmus diagonalisieren wir das GS:

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & -3 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ Z2 + 2Z1 \\ Z3 - 5Z1 \\ Z4 - 2Z1 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 7 & -6 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ Z3 + 3Z2 \\ Z4 - 2Z2 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ Z4 - \frac{1}{4}Z3 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) = (A^* | \vec{b}^*)$$

Prof.Dr.B.Grabowski e-mail: grabowski@htw-saarland.de Tel.: 5867-424
Lösungen zu Übung 9

Hier ist Rg(A*) $\neq$ Rg(A*| $\vec{b}$ *) bzw. Rg(A) $\neq$ Rg(A| $\vec{b}$) $\Rightarrow$ Das GS ist nicht lösbar!

Lösungsmenge: L = Φ

<u>Zu b)</u>

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 2x_3 + 7 \\ 2x_1 &= -3x_2 \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 + 28 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} * \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -28 \end{pmatrix}$$

Mittels Gaus'schem Algorithmus diagonalisieren wir das GS:

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 7 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 8 & -28 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ Z2-2Z1 \\ Z3-2Z1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 4 & -14 \\ 0 & -3 & 12 & -42 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ Z3-3Z2 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 4 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (A^* \mid \vec{b}^*)$$

Es ist rg(A)=rg(A*) =2 und $rg(A \mid \vec{b}) = rg(A^* \mid \vec{b}^*)$ =2.

Hier ist rg(A) = rg(A| $\vec{b}$) = 2 < 3. D.h. das GS hat unendlich viele Lösungen. Die Lösungsmenge ist ein affiner Raum der Dimension d=n-rg(A) = 3-2 = 1, also eine Gerade.

Berechnung der Lösungsmenge:
Aus der diagonalisierten Matrix ergibt sich folgende Diagonalgestalt des GS:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 7 \\ -x_2 + 4x_3 &= -14 \end{aligned}$$

Wir haben 2 Gleichungen und 2 Unbekannte, d.h., eine Unbekannte, wir wählen x_3, können wir beliebig wählen. Anschließend lösen wir die beiden Gleichungen von unten nach oben nach x_1 und x_2 auf. Wir erhalten:

$x_3 = \lambda$.

$$\begin{aligned} x_2 &= 14 + 4x_3 = 14 + 4\lambda \\ x_1 &= 7 - 2x_2 + 2x_3 = 7 - 28 - 4\lambda + 2\lambda = -21 - 2\lambda \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Lösungsmenge ist also:

Prof.Dr.B.Grabowski e-mail: grabowski@htw-saarland.de Tel.: 5867-424
Lösungen zu Übung 9

$$L = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -21 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in R \right\}$$

Aufpunkt: $\begin{pmatrix} -21 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix}$ ***, Basisvektor:*** $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zu Aufgabe 7

Für welche Werte von t bildet die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 3x_1 + tx_2 - x_3 &= \frac{14}{3} \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 &= 5 \\ 5x_1 + 8x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

eine Gerade? Wie lautet in diesem Fall die Lösung des Gleichungssystems?

Lösung:
Das Gleichungssystem ist äquivalent mit folgender Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & t & -1 & \frac{14}{3} \\ 2 & -1 & -2 & 5 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \end{array}\right)$$ Vertauschen der Spalten, in der Reihenfolge S3,S1,S2

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & t & \frac{14}{3} \\ -2 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & 8 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ Z2\text{-}2Z1 \\ Z3+Z1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & t & \frac{14}{3} \\ 0 & .-4 & -1-2t & -\frac{13}{3} \\ 1 & 8 & 8+t & \frac{26}{3} \end{array}\right) Z3+2Z2 \quad \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} -1 & 3 & t & \frac{14}{3} \\ 0 & .-4 & -1-2t & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 6-3t & 0 \end{array}\right).$$

Das Gleichungssystem ist nur dann lösbar, falls gilt: $rg(A) = rg(A|\vec{b})$.

Weiterhin gilt: dim(Lösungsraum) = n - rg(A) , wobei n die Anzahl der Unbekannten ist, also n=3.

Der Lösungsraum soll eine Gerade sein, d.h., die Dimension des Lösungsraumes muss 1 sein.

Prof.Dr.B.Grabowski e-mail: grabowski@htw-saarland.de Tel.: 5867-424
Lösungen zu Übung 9

Da $n = 3$ folgt aus der Bedingung 1 = 3 - rg(A) dass $rg(A) = rg(A|\vec{b}) = 2$ sein muss.
Deshalb muss in der obigen Dreiecksmatrix 6-3t = 0 sein. D.h., es ist

$$6 - 3t = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

Die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Systems hat also die Dimension 1 für t=2.

Berechnen der Lösung des Gleichungssystems:

Einsetzen von $t = 2$ (in obige Matrix):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & \frac{14}{3} \\ 0 & .-4 & -5 & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$-4x_1 = -\frac{13}{3} + 5x_2 \Leftrightarrow x_1 = \frac{13}{12} - \frac{5}{4}x_2$$

$$x_3 = -\frac{14}{3} + 3(\frac{13}{12} - \frac{5}{4}x_2) + 2x_2 \Leftrightarrow x_3 = -\frac{17}{12} - \frac{7}{4}x_2$$

Die Lösungsmenge unseres inhomogenen Gleichungssystems ist also für t=2:

$$L = \left\{ \vec{x} \in R^3 \middle| \vec{x} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ -17 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}, \lambda \in R \right\}$$

Zu Aufgabe 8

$$ax_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + ax_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + x_2 + ax_3 = 1$$

Für welche $a \in$ R ist dieses GS

a) eindeutig
b) mehrdeutig
c) nicht lösbar?
d) Geben Sie im Falle der eindeutigen Lösbarkeit die Lösung an!

Lösung:
Das Gleichungssystem

$$ax_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + ax_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + x_2 + ax_3 = 1$$

Prof.Dr.B.Grabowski e-mail: grabowski@htw-saarland.de Tel.: 5867-424
Lösungen zu Übung 9

ist äquivalent zur Matrix $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$, auf die wir den Gausschen Algorithmus anwenden.

Gausscher Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\text{Vertauschen} \\ \text{derSpalten} \\ 1\,und\,3}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ Z2 - Z1 \rightarrow \\ Z3 - aZ1 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ Z3 + Z2 \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-a \end{array}\right)$$

Lösbarkeitsbedingungen:

Zu a) eindeutig lösbar, falls rg(A) = rg(A|$\vec{b}$) = 3, also falls det(A)≠0. Dazu müssen alle Diagonalelemente der Matrix ≠0 sein.
D.h., eindeutig lösbar ⇔ $a-1 \neq 0 \wedge -a^2-a+2 \neq 0$.
Die Lösung der Gleichung $-a^2-a+2 = 0$ ergibt: $a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow$

$$a_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

D.h., das GS ist eindeutig lösbar, falls gilt: $a \neq 1 \wedge a \neq -2$

Zu b) und c)
Wir untersuchen nun die anderen Fälle:

Fall a=1:

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-a \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Fall a=-2:

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-a \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Prof.Dr.B.Grabowski e-mail: grabowski@htw-saarland.de Tel.: 5867-424
Lösungen zu Übung 9

Zu b)

Mehrdeutig lösbar, falls rg(A) = rg(A|$\vec{b}$) < 3.

Für a=1 ist rg(A) = rg(A|$\vec{b}$) =1< 3, d.h. das GS ist für a = 1 mehrdeutig lösbar!

Zu c)

Das GS ist nicht lösbar, falls gilt: rg(A)≠ rg(A|$\vec{b}$) .

Für a=-2 ist rg(A) =2 und rg(A|$\vec{b}$) =3, d.h. das GS ist für a = -2 nicht lösbar!

Zu d)

Die Lösung des GS im Fall der eindeutigen Lösbarkeit berechnen wir z.B. mittels Cramerscher Regel:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{\det(A)}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)}, \quad \textit{mit} \quad \det(A) = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

Die Lösungen lassen sich leicht mittels Saruss'scher Regel berechnen. Wir erhalten:

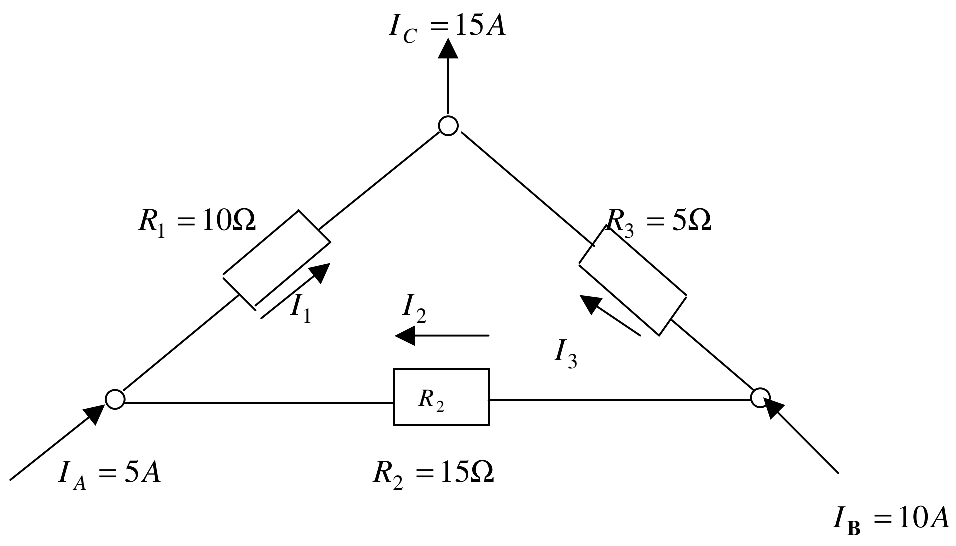
det(A) = $(2-a^2-a)(1-a)=(1-a)^2(a+2)$ und

$$x_1 = \frac{(a-1)^2}{(1-a)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2}, \quad x_2 = \frac{1}{a+2}, \quad x_3 = \frac{1}{a+2}$$

Lösung eindeutig lösbarer GS

Zu Aufgabe 9

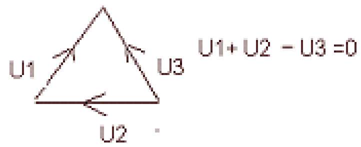
Berechnen Sie die Teilströme I_1, I_2, I_3 in folgender Masche:



Prof.Dr.B.Grabowski e-mail: grabowski@htw-saarland.de Tel.: 5867-424

Lösungen zu Übung 9

<u>Hinweis:</u>
Verwenden Sie die Kirchhoff'schen Gesetze (Maschenregel und Knotenregel) und stellen Sie zunächst alle in dieser Masche geltenden Gleichungen für I_1, I_2, I_3 auf! Lösen Sie anschließend das GS mit dem Gausschen Algorithmus!
Maschenregel: Die Summe der Spannungen in einer Masche ist gleich 0
(Beachten Sie, dass U=IR ist und beachten Sie die Richtung des Spannungsabfalls!)



Knotenregel: Die Summe der in einen Knoten hineinfließenden Ströme ist gleich der Summe der aus dem Knoten herausfließenden Ströme.

Lösung:
Wir erhalten aus der Skizze folgendes Gleichungssystem:

$(1) U_1 + U_2 - U_3 = 0$ *Maschenregel*

$(2) I_2 + I_A = I_1$ *Knotenregel*

$(3) I_B = I_2 + I_3$ ""

$(4) I_1 + I_3 = I_C$ ""

$(5) U_i = RI_i$ *Ohmsches Gesetz*

Setzen wir (5) in (1) ein und berücksichtigen wir die in der Skizze gegebenen Werte für Ströme und Wiederstände, so erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} (1') & 10I_1 + 15I_2 - 5I_3 = 0 \\ (2') & I_1 - I_2 = 5 \\ (3') & I_2 + I_3 = 10 \\ (4') & I_1 + I_3 = 15 \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 & 15 & -5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{I} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Mittels Gaus'schem Algorithmus diagonalisieren wir das GS:

$$(A \mid \vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 15 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right) \begin{array}{l} Z1 <-> Z2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 10 & 15 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ Z2 - 10Z1 \\ \\ Z4 - Z1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 25 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ Z3 <-> Z2 \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 25 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ Z3 - 25Z2 \\ Z4 - Z2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -30 & -250 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir erhalten also folgendes zu (1') bis (4') äquivalentes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 \qquad\qquad &= 5 \\ I_2 \quad + \quad I_3 &= 10 \\ -30 I_3 &= -250 \end{aligned}$$

Wir lösen es von unten nach oben auf und erhalten:
I_3 =25/3 = 8,333 A
I_2 = 5/3 = 1,67 A
I_1 = 20/3 = 6,67 A

Zu Aufgabe 10

Durch folgende 4 Messpunkte (x_i,y_i) , i=1,...,4 geht genau ein Polynom 3. Grades

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \;.$$

xi	-1	0	1	2
yi	0	1	0	1

Bestimmen Sie die Koeffizienten a-d dieses Polynoms, indem Sie zunächst ein Gleichungssystem aufstellen und dieses dann mittels Gausschem Algorithmus oder der Cramerschen Regel lösen!

Lösung:

Aus der Beziehung $y_i = ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d$, die für jeden der 4 Punkte (xi,yi) gelten muss, erhalten wir das Gleichungssystem:

$$A \cdot \vec{v} = \vec{y}$$

$$\text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

Wir lösen es durch Anwendung des Gausschen Algorithmus:

Prof.Dr.B.Grabowski e-mail: grabowski@htw-saarland.de Tel.: 5867-424
Lösungen zu Übung 9

$$(A \mid \vec{y}) = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ Z3+Z1 \\ Z4+8Z1 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & -6 & 9 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ Z4-6Z3 \end{array},$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \textit{an letzte Stelle} \\ \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem $A \cdot \vec{v} = \vec{y}$ ist folglich äquivalent zu:

$$\begin{aligned} -a + b - c + d &= 0 \\ 2b + 2d &= 0 \\ -6c - 3d &= 1 \\ d &= 1 \end{aligned}$$

Wir lösen es von unten nach oben auf und erhalten:

d = 1   c = - 2/3   b = -1   a = 2/3

Unser Polynom lautet also:

y= $\frac{2}{3}x^3 - x^2 - \frac{2}{3}x + 1$.

Zu Aufgabe 11:

Seien $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

Geben Sie die Lösung x_3 des Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ an!

Hinweis: Hier ist nicht die gesamte Lösung gefragt. Deshalb macht sich hier die Cramersche Regel ganz gut!

Lösung:
Wir können feststellen, dass die Determinante von A ungleich 0 ist:

Prof.Dr.B.Grabowski e-mail: grabowski@htw-saarland.de Tel.: 5867-424
Lösungen zu Übung 9

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} Z1 <-> Z2 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ Z2-2Z1 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ Z3 <-> Z2 \\ \\ \end{matrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ Z3+5Z2 \\ Z4-Z2 \end{matrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ Z4-Z3/10 \end{matrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9/10 \end{pmatrix}$$

$$= 9$$

Damit ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar und wir können x_3 mittels Cramerscher Regel bestimmen:

$$x_3 = \frac{\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{\det(A)} \underset{\substack{Entwicklung \\ nach\ 4.Zeile}}{=} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{9} = \frac{1+6}{9} = \frac{7}{9}$$