HTW Übung 8 MST Mathematik I

Matrizen, Determinanten, Lösen von GS

Prof. Dr.B.Grabowski

Matrizen

Aufgabe 1

Seien

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}8\\4\\5\\1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&7&4&2\\0&2&2&1\\0&0&4&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Berechnen Sie:

a) A·E b) $B^T \cdot C$ c) 4C + 7 D

Aufgabe 2

Geben Sie den Rang der folgenden Matrizen A – E an !

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}8\\4\\5\\1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&7&4&2\\0&2&2&1\\0&0&4&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen mittels Gausschem Algorithmus!

Hinweis:

Beim Gausschen Algorithmus versuchen Sie durch Anwendung der Operationen

1) Vertauschung von Zeilen (oder Spalten)
2) Multilplikation einer Zeile (oder Spalte) mit einer reellen Zahl $\neq 0$
3) Addition des Vielfachen einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte)

in die Diagonalform:

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1r+1} & \cdots & a_{1n}\\
0 & a_{21} & \cdots a_{2r} & a_{2r+1} & \cdots & a_{2n}\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & \cdots 0 & a_{rr} & a_{rr+1} & \cdots & a_{rn}\\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

zu bringen. Der Rang ist dann r.

$$a)A=\begin{pmatrix}2&4&7\\3&2&9\\1&2&3\end{pmatrix}\qquad b)B=\begin{pmatrix}4&1&2&7\\1&2&4&1\\2&4&3&2\\7&1&2&6\end{pmatrix}$$

Aufgabe 4
Untersuchen Sie durch Rangbestimmung, ob folgende Vektoren linear unabhängig sind:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

<u>Determinanten</u>

Aufgabe 5
Berechnen Sie folgende Determinanten:

$$\text{a) } A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{b) } B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \text{c) } C = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 6
Die Determinante einer nxn-Matrix A lässt sich nach Laplaceschen Entwicklungssatz wie folgt berechnen:

Satz: (Laplac'scher Entwicklungssatz)
Es gilt:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} D_{ij} (-1)^{i+j} \quad \text{(Entwicklung nach der i.ten Zeile)}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} D_{ij} (-1)^{i+j} \quad \text{(Entwicklung nach der j.ten Spalte)}$$

Berechnen Sie den Wert der nachstehenden Determinante mittels Laplac'schen Entwicklungssatz! (D.h., Entwickeln Sie die Determinante nach der Zeile bzw. Spalte, die möglichst viele Nullen enthält!)

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1/2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 7:
Berechnen Sie die folgenden Determinanten mittels Laplac'schem Entwicklungssatz und begründen Sie Ihr Ergebnis!

a) $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$ b) $A = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ c) $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

(d.h.2. Spalten von A sind gleich)

Lösung von Gleichungssystemen

Aufgabe 8
Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden GS mittels Cramerscher Regel! Machen Sie jeweils die Probe!

(Die *Cramersche Regel* besagt, dass die Lösung $x_i = \frac{D_i}{\det(A)}$ ist, wobei D_i die Determinante der Matrix ist, die entsteht, wenn man in der Koeffizientenmatrix A die i.te Spalte durch die rechte Seite des GS ersetzt).

a) $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 4x_1 - 2x_2 &= 2 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned}$

Aufgabe 9
Lösen Sie mittels Cramerscher Regel die folgenden Gleichungssysteme nach den Unbekannten x_i auf!

a) $\begin{array}{rrrcl} 2x_1 + & 3x_2 - & x_3 & = & 1 \\ x_1 + & x_2 + & x_3 & = & 0 \\ x_1 + & 2x_2 - & x_3 & = & 1 \end{array}$ b) $\begin{array}{rrrrcl} x_1 + & 2x_2 + & 2x_3 + & x_4 & = & 0 \\ & x_2 + & 4x_3 + & x_4 & = & 0 \\ x_1 + & x_2 + & & 2x_4 & = & 1 \\ & 2x_2 + & x_3 + & 3x_4 & = & 1 \end{array}$

Machen Sie jeweils die Probe!

Aufgabe 10
Durch folgende 4 Messpunkte (x_i,y_i) , i=1,...,4 geht genau ein Polynom 3. Grades

y= $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

xi	-1	0	1	2
yi	0	1	0	1

Bestimmen Sie die Koeffizienten a-d dieses Polynoms, indem Sie zunächst ein Gleichungssystem aufstellen und dieses dann mittels Gausschem Algorithmus oder Cramerscher Regel lösen!