HTW Übung 9 Mathematik 1 MST

Prof.Dr.B.Grabowski e-mail: grabowski@htw-saarland.de Tel.: 5867-424

Eigenschaften von Determinanten

Aufgabe 1

Berechnen Sie den Rang und die Determinante folgender Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Gegeben seien 3 Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ mit $\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = 7$.
Berechnen Sie die Determinante der 3 Vektoren:

$$\vec{b}_1 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \quad \vec{b}_2 = \vec{a}_2 + \vec{a}_3, \quad \vec{b}_3 = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_3$$

Homogene Gleichungssysteme, Gausscher Algorithmus

Aufgabe 3

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gausschen Algorithmus die jeweilige Lösungsmenge folgender Gleichungssysteme!
Geben Sie im Falle der Lösbarkeit des GS die Lösungsmenge als Vektorraum an und geben Sie die Dimension und die Basis an!

a) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_3 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} -2x_1 &= -x_2 - x_3 \\ x_1 - 2x_2 &= -x_3 \\ x_1 + x_2 &= 2x_3 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 2x_3 \\ 2x_1 &= -3x_2 \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 4

$$\begin{aligned} ax_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + ax_3 &= 0 \end{aligned}$$

Für welche $a \in$ R ist dieses GS

a) eindeutig
b) mehrdeutig
d) Geben Sie im Falle der eindeutigen Lösbarkeit die Lösung an!

Inhomogene Gleichungssysteme, Gausscher Algorithmus

Aufgabe 5

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus!

a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & 8 & 8 & -4 \\ 4 & 2 & -16 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -13 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 9 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 50 \end{pmatrix}$

Hinweis: Wenden Sie den GA auf die Matrix $(A \mid \vec{b})$ an, die das GS $A\vec{x} = \vec{b}$ charakterisiert:

Aufgabe 6

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gausschen Algorithmus die jeweilige Lösungsmenge folgender Gleichungssysteme!
Geben Sie im Falle der Lösbarkeit des GS die Lösungsmenge als affinen Raum an und geben Sie die Dimension, die Basis und den Aufpunkt an!

a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= x_3 + 2 \\ -2x_1 &= -x_3 - 2 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 5 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 2x_3 + 7 \\ 2x_1 &= -3x_2 \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 + 28 &= 0 \end{aligned}$

Aufgabe 7

Für welche Werte von t bildet die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 3x_1 + tx_2 - x_3 &= \frac{14}{3} \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 &= 5 \\ 5x_1 + 8x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

eine Gerade? Wie lautet in diesem Fall die Lösung des Gleichungssystems?

Aufgabe 8

$$\begin{aligned} ax_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 &= 1 \end{aligned}$$

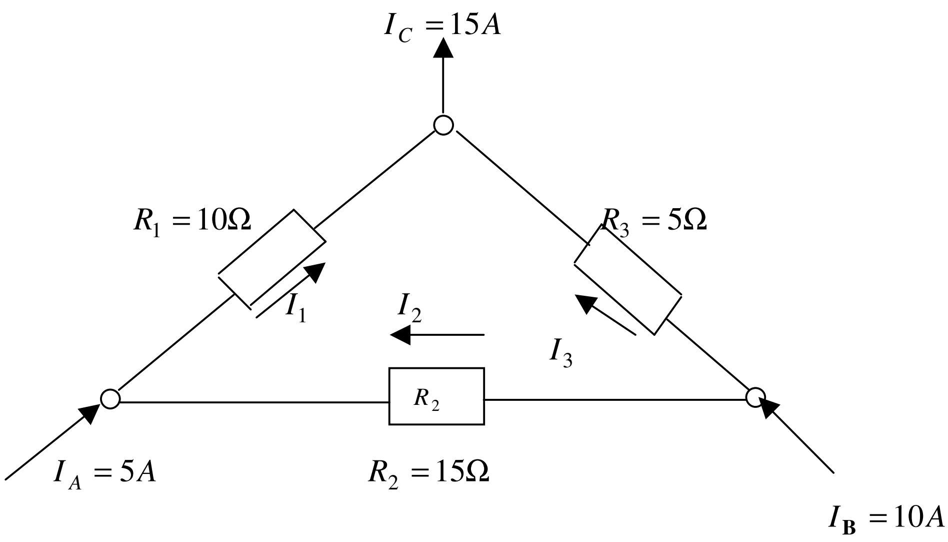
Für welche $a \in$ R ist dieses GS

c) eindeutig
d) mehrdeutig
e) nicht lösbar?
d) Geben Sie im Falle der eindeutigen Lösbarkeit die Lösung an!

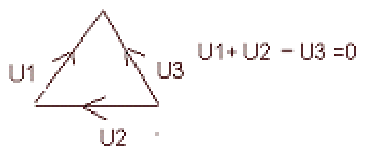
Lösung eindeutig lösbarer GS

Aufgabe 9

Berechnen Sie die Teilströme I_1, I_2, I_3 in folgender Masche:



Hinweis:
Verwenden Sie die Kirchhoff'schen Gesetze (Maschenregel und Knotenregel) und stellen Sie zunächst alle in dieser Masche geltenden Gleichungen für I_1, I_2, I_3 auf! Lösen Sie anschließend das GS mit dem Gausschen Algorithmus!
Maschenregel: Die Summe der Spannungen in einer Masche ist gleich 0
(Beachten Sie, dass U=IR ist und beachten Sie die Richtung des Spannungsabfalls!)



Knotenregel: Die Summe der in einen Knoten hineinfließenden Ströme ist gleich der Summe der aus dem Knoten herausfließenden Ströme.

Aufgabe 10

Durch folgende 4 Messpunkte (x_i,y_i) , i=1,...,4 geht genau ein Polynom 3. Grades

y=$ax^3 + bx^2 + cx + d$.

xi	-1	0	1	2
yi	0	1	0	1

Bestimmen Sie die Koeffizienten a-d dieses Polynoms, indem Sie zunächst ein Gleichungssystem aufstellen und dieses dann mittels Gausschem Algorithmus oder der Cramerschen Regel lösen!

Aufgabe 11:

Seien $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

Geben Sie die Lösung x_3 des Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ an!

Hinweis: Hier ist nicht die gesamte Lösung gefragt. Deshalb macht sich hier die Cramersche Regel ganz gut!