

HTW	Mathematik I Lösungen zu Übung 3
	MST

Zu Aufgabe 5

$$a) (4^{0.3})^{10} = 4^{0.3 \cdot 10} = 4^3 = 64$$

$$b) \sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} \cdot \sqrt[3]{8} = \left(64^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot 2 = 4$$

Zu Aufgabe 6

$$a) \log_{27}(x) + 2\log_9(x) + \log_3(x) = 3,5$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{\ln(27)} + 2\frac{\ln(x)}{\ln(9)} + \frac{\ln(x)}{\ln(3)} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \ln(x) \left(\frac{1}{\ln(3^3)} + \frac{2}{\ln(3^2)} + \frac{1}{\ln(3)} \right) = \frac{7}{2} \Leftrightarrow$$

$$\ln(x) \left(\frac{1}{3\ln(3)} + \frac{2}{2\ln(3)} + \frac{1}{\ln(3)} \right) = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \ln(x) \frac{7}{3\ln(3)} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{3}{2}\ln(3)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = \ln(3^{\frac{3}{2}}) \Leftrightarrow \ln(x) = \ln(\sqrt{27}) \Leftrightarrow x = \sqrt{27}$$

$$b) 4^{2x} - 3^x = 2^{4x} + 3^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow 2^{4x} - 3^x = 2^{4x} + 3^{x+1} \Leftrightarrow -1 = 3^{x+1-x} \Leftrightarrow -1 = 3 \Rightarrow$$

keine Lösung in $\mathbb{R} \Rightarrow L = \emptyset$

$$c) \lg(2x-3) - \lg(3x+4) = -1$$

$$(2x-3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}) \wedge (3x+4 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{4}{3}) \Rightarrow x > \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \lg\left(\frac{2x-3}{3x+4}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{3x+4} = 10^{-1} \Leftrightarrow 20x-30 = 3x+4 \Leftrightarrow 17x = 34 \Leftrightarrow x = 2$$

insgesamt: Lösungsmenge: $L = \{2\}$

$$d) \ln(\sqrt{x}) + 2\ln(x) = \ln(2x)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^{\frac{1}{2}}) + 2\ln(x) = \ln(x) + \ln(2) \Leftrightarrow \frac{3}{2}\ln(x) = \ln(2) \Leftrightarrow \ln(x) = \ln(2^{\frac{2}{3}}) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4}$$

$$L = \{\sqrt[3]{4}\}$$

$$e) (2x-1)^2 = -x+1$$

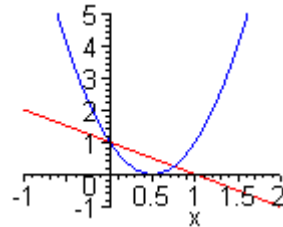
$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = -x + 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow (x=0) \vee (x = \frac{3}{4})$$

HTW	Mathematik I Lösungen zu Übung 3
	MST

Lösungsmenge: $L = \left\{0, \frac{3}{4}\right\}$

Graphisch:

Blau: $y = (2x-1)^2$ rot: $y = -x+1$



f) $\sqrt{x-4} + \sqrt{2+x} = \sqrt{x+1}$

Def.bereich D: $(x \geq 4) \wedge (x \geq -2) \wedge (x \geq -1) \Rightarrow x \geq 4$, also $D = [4, \infty)$

Quadrieren(s.o.!) $\Rightarrow (x-4) + (2+x) + 2\sqrt{(x-4)(2+x)} = x+1 \Leftrightarrow$

$2x-2 + 2\sqrt{x^2-2x-8} = x+1 \Leftrightarrow$

$2\sqrt{x^2-2x-8} = -x+3 \Rightarrow 4(x^2-2x-8) = x^2-6x+9 \Leftrightarrow$

$3x^2-2x-41=0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}\sqrt{31}$

Probe, da nicht nur Äquivalenzumformungen:

$x_1 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{31}$, da $x_1 < 4$ Wid. zur Vor., also ist x_1 keine Lösung

$x_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{31}$ einsetzen oder:

da man für alle x aus dem Def.bereich zeigen kann:

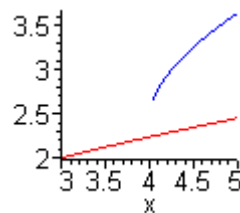
$\sqrt{x+1} < \sqrt{x-4} + \sqrt{2+x}$

kann die Gleichung keine Lösung haben

Bew.: $\sqrt{x+1} < \sqrt{x+2} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} < \sqrt{x+2} + \sqrt{x-4}$, da $\sqrt{x-4} \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

Graphisch

Blau: $y = \sqrt{x+2} + \sqrt{x-4}$ rot: $y = \sqrt{x+1}$



HTW	Mathematik I Lösungen zu Übung 3
	MST

Zu Aufgabe 7

a) $2x - 9 \leq \sqrt{x^2 + 21}$

$D = \mathbb{R}$

1. Fall: $2x - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{9}{2}$

$\Rightarrow (2x - 9)^2 \leq x^2 + 21 \Leftrightarrow 3x^2 - 36x + 60 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 6)^2 \leq -20 + 36$

$(-4 + 6 \leq x) \vee (x \leq 4 + 6) \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 10$

insgesamt: $(x \geq \frac{9}{2}) \wedge (-2 \leq x \leq 10) \Leftrightarrow \frac{9}{2} \leq x \leq 10$

$L_2 = \left[\frac{9}{2}, 10 \right]$

2. Fall: $x < \frac{9}{2}$

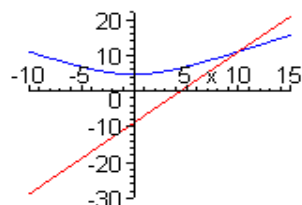
\Rightarrow Ungleichung immer erfüllt, da dann immer gilt: $\sqrt{x^2 + 21} \geq 0$, also auch größer als

jede negative Zahl $\Rightarrow L_2 = \left(-\infty, \frac{9}{2} \right)$

Gesamtlösungsmenge: $L = (-\infty, 10]$

Graphisch:

Blau: $\sqrt{x^2 + 21}$ rot: $2x - 9$



b) $|x - 2| \geq x^2$

$D = \mathbb{R}$

1. Fall: $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

$x - 2 \geq x^2 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq -2 + \frac{1}{4}$

HTW	Mathematik I Lösungen zu Übung 3
	MST

⇒ keine reellen Lösungen, Lösungsmenge leer

2.Fall: $x < 2$

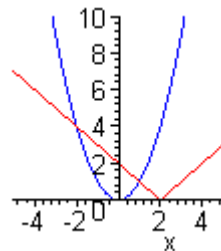
$$-x + 2 \geq x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \leq 2 + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) \leq x \vee \left(x \leq -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{Gesamtlösungsmenge } L = \{x \mid -2 \leq x \leq 1 \wedge x < 2\}$$

$$L = [-2, 1]$$

Graphisch:

Blau. $y = x^2$, rot: $y = |x - 2|$



Zu Aufgabe 8

$$M_1 = \{x \mid |2x + 3| < |4x - 7|\}$$

$$M_2 = \{x \mid |x - 1| > |2x + 3|\}$$

zu M_1 :

$$1.\text{Fall: } (2x + 3 \geq 0) \wedge (4x - 7 \geq 0) \Leftrightarrow \left(x \geq -\frac{3}{2}\right) \wedge \left(x \geq \frac{7}{4}\right) \Leftrightarrow x \geq \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow 2x + 3 < 4x + 7 \Leftrightarrow 10 < 2x \Leftrightarrow 5 < x$$

$$L_1 = (5, \infty)$$

$$2.\text{Fall: } (2x + 3 < 0) \wedge (4x - 7 < 0) \Leftrightarrow x < -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow -2x - 3 < -4x + 7 \Leftrightarrow 2x < 10 \Leftrightarrow x < 5$$

$$L_2 = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$$

$$3.\text{Fall: } (2x + 3 < 0) \wedge (4x - 7 \geq 0) \Leftrightarrow \left(x < -\frac{3}{2}\right) \wedge \left(x \geq \frac{7}{4}\right) \Rightarrow$$

$$L_3 = \emptyset$$

$$4.\text{Fall: } (2x + 3 \geq 0) \wedge (4x - 7 < 0) \Leftrightarrow \left(x \geq -\frac{3}{2}\right) \wedge \left(x < \frac{7}{4}\right) \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right)$$

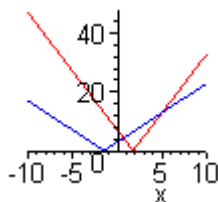
$$2x + 3 < -4x + 7 \Leftrightarrow 6x < 4 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$$

$$L_4 = \left[-\frac{3}{2}, \frac{2}{3} \right)$$

Gesamte Lösungsmenge $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$

$$\Rightarrow L = \left(-\infty, \frac{2}{3} \right) \cup (5, \infty)$$

Graphisch: blau : $|2x + 3|$ rot : $|4x - 7|$



Zahlengerade:



zu M_2 :

$$1. \text{ Fall: } (x - 1 \geq 0) \wedge (2x + 3 \geq 0) \Leftrightarrow (x \geq 1) \wedge (x \geq -\frac{3}{2}) \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$\Rightarrow x - 1 > 2x + 3 \Leftrightarrow -4 > x$$

$$\Rightarrow (x < -4) \wedge (x \geq 1) \Rightarrow L_1 = \emptyset$$

$$2. \text{ Fall: } (x - 1 < 0) \wedge (2x + 3 < 0) \Leftrightarrow x \leq -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow -x + 1 > -2x - 3 \Leftrightarrow x > -4$$

$$\Rightarrow L_2 = (-4, -\frac{3}{2})$$

$$3. \text{ Fall: } (x - 1 < 0) \wedge (2x + 3 \geq 0) \Leftrightarrow (x < 1) \wedge (x \geq -\frac{3}{2}) \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{3}{2}, 1 \right)$$

$$\Rightarrow -x + 1 > 2x + 3 \Leftrightarrow -2 > 3x \Leftrightarrow x < -\frac{2}{3}$$

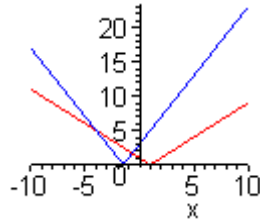
$$\Rightarrow L_3 = \left[-\frac{3}{2}, -\frac{2}{3} \right)$$

$$4. \text{ Fall: } (x - 1 > 0) \wedge (2x + 3 \leq 0) \Leftrightarrow (x > 1) \wedge (x \leq -\frac{3}{2}) \Rightarrow L_4 = \emptyset$$

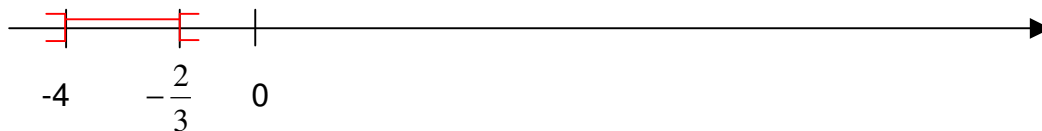
Gesamte Lösungsmenge $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$

$$L = \left(-4, -\frac{2}{3}\right)$$

Graphisch rot : $|x-1|$ blau : $|2x+3|$



Zahlengerade:



b)

$$M_1 \cap M_2 = M_2, \text{ da } M_2 \subseteq M_1$$

$$M_1 \cup M_2 = M_1, \text{ da } M_2 \subseteq M_1$$

$$M_1 \setminus M_2 = (-\infty, -4] \cup \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup (5, \infty)$$

c) Alle Zahlen aus folgendem Intervall: $\left[\frac{2}{3}, 5\right]$