HTW	Lösungen zu Übung 6 MST Mathematik I Geometrie von Geraden und Ebenen Prof. Dr.B.Grabowski

Zu Aufgabe 1)

Zu a) Es ist mit P=(x,y):

$x = 2+6\lambda$

$y = -3+4\lambda$

Wir lösen die erste Gleichung nach λ auf ($\lambda = (x-2)/6$) und setzen das Ergebnis in die 2. Gleichung ein und erhalten die Geradengleichung in Normalform:

$$y = -3 + \frac{4(x-2)}{6} = \frac{2}{3}x - \frac{13}{3},\ x\in R.$$

Zu b) Die Geradengleichung $y=-4x+2,\ x\in R$ erfüllen alle Punkte P=(x,y) mit:

$$\begin{aligned} x &= x \\ y &= -4x + 2 \end{aligned}$$

In Vektorschreibweise: $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, x \in R$

Die Punkt-Richtungsform lautet folglich:

$$g=\{P|\ P=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \lambda \in R\}$$

Zu c)

Wir überprüfen, ob der Punkt die Geradengleichung erfüllt, d.h. ob gilt:

$\exists\lambda\in R$: $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$. Ausgeschrieben ist diese Gleichungssystem: $\begin{aligned} -1 &= 1+2\lambda \\ 3 &= 2+6\lambda \\ 2 &= 3+4\lambda \end{aligned}$

Aus de ersten Zeile folgt, dass $\lambda = -1$ sein muss. Für dieses λ ist aber die 2. und auch die 3. Zeile nicht erfüllt. D.h. Q liegt nicht auf der Geraden g.

Zu Aufgabe 2)

Gegeben seien drei Geraden:

$g1=\{P|\ P=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \lambda \in R\}$, $g2=\{P|\ P=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in R\}$,

$g3=\{P|\ P=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \lambda \in R\}$.

a) Bestimmen Sie die Lage der drei Geraden zueinander! g1? g2, g1?g3 , g2?g3.
b) Falls die Geraden sich schneiden, so berechnen Sie Schnittpunkt und Schnittwinkel!
c) Falls die Geraden parallel oder windschief sind, so berechnen Sie den Abstand!

Lösung:
Zu a) g1 ist windschief zu g2, g2 schneidet g3, g1 und g3 sind parallel.
Zu b) Schnittpunkt von g2 und g3 ist S=(2,0,2).
Schnittwinkel α: Winkel zwischend den Richtungsvektoren:

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-3\\-2\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}-1\\-3\\-2\end{pmatrix}\right\|} = \frac{-3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{14}} = \frac{-3}{\sqrt{28}} = 0{,}567 \quad \Rightarrow \alpha = 124{,}54°$$

Zu c) 1. Fall: g1 ist windschief zu g2, Abstand:

$$d(g1, g2) = \left|\frac{[\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2]}{|\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2|}\right|.$$

Es ist $\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2 = \begin{pmatrix}6\\2\\-6\end{pmatrix}$ und $[\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2] = \overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2) = \begin{pmatrix}0\\-2\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\2\\-6\end{pmatrix} = 8$

Demzufolge beträgt der Abstand: $d(g1, g2) = \left|\frac{8}{\sqrt{36+4+36}}\right| = \frac{8}{\sqrt{76}} = 0{,}918$.

2. Fall: g1 und g3 sind parallel. Abstand: Wird in der Übung berechnet!

Zu Aufgabe 3)

Achtung: Die Lösungen zu den Aufgaben 3a) bis 3e) sind nicht eindeutig!
D.h., im folgenden sind Beispiellösungen angegeben. Andere können aber auch richtig sein.

Zu a)

Richtungsvektor $\vec{a}_2$ von g2: $\vec{a}_2 = \vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}$**.** (d.h., der Rictunsvektor von g2 ist gleich $\vec{a}_1$ = Richtungsvektor von g1). Damit sind die beiden Geraden parallel oder gleich.

Aufpunkt P_2 von g2: $P_2 = P_1 + \vec{v}$ **:**

Damit die Geraden g1 und g2 nicht identisch sind, konstruieren wir uns einen Vektor $\vec{v}$, der nicht parallel zu $\vec{a}_1$ ist, also von der Geraden g1 weg zeigt. Z.B. kann $\vec{v}$ ein Vektor sein, der senkrecht auf $\vec{a}_1$ steht:

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Damit ist der Aufpunkt P_2 von g2 z.B.: $P_2 = P_1 + \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ **.**

Lösung: $g2 = \{P \mid P = P_2 + \lambda \vec{a}_2, \lambda \in R\}$

Zu b) Lösung wie unter a) nur dass wir $\vec{v}$ senkrecht zu $\vec{a}_1$ zunächst mit einer Länge von 1 wählen (also normieren) und dann mal 3 nehmen:

Richtungsvektor $\vec{a}_2$ **von g2**: $\vec{a}_2 = \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$**,** (damit ist g2 parallel oder gleich g1)

Aufpunkt P_2 von g2: $P_2 = P_1 + 3\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$**.** (damit ist der Aufpunkt P2 von P1 3 Längeneinheiten auf der senkrecht zur Geraden g1 verlaufenden Gerade mit Richtungsvektor $\vec{v}$ entfernt).

Zu c) Richtungsvektor $\vec{a}_2$ **von g2**: $\vec{a}_2 = \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$**,** **Aufpunkt P_2 von g2:** $P_2 = P_1$**.**

Zu d) Aufpunkt P_2 von g2: $P_2 = P_1$**.**

Als **Richtungsvektor** nehmen wir einen Vektor, der weder parallel zu $\vec{a}_1$ ist noch senkrecht auf $\vec{a}_1$ steht.

Z.B.: $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zu e)

Den **Aufpunkt P_2 von g2** wählen wir analog zu b):

$P_2 = P_1 + 4\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Den Richtungsvektor wählen wir so, dass er senkrecht auf $\vec{a}_1$ und senkrecht auf $\vec{v}$ steht. Damit gewährleisten wir, dass sich die Geraden mit Sicherheit nicht schneiden:

z.B. $\vec{a}_2 = \vec{a}_1 \otimes \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix}$

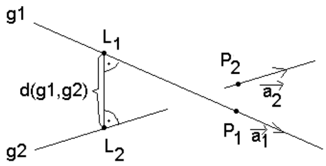
Lösung: $g2 = \{P \mid P = P_2 + \lambda \vec{a}_2, \lambda \in R\}$

Zu Aufgabe 4)

a) Entwickeln Sie eine Formel für den Abstand d(g1,g2) zweier windschiefer Geraden

$g_1 = \{P \mid P = P_1 + \lambda \vec{a}_1, \lambda \in R\}$ und $g_2 = \{P \mid P = P_2 + \lambda \vec{a}_2, \lambda \in R\}$!

und geben Sie an, wie sie die beiden Lotpunkte L1 und L2 (siehe Skizze) berechnen!



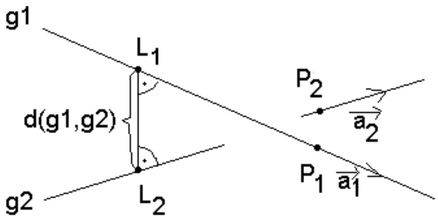
b)Zeigen Sie, dass für den Abstand d(g1,g2)= $|\overrightarrow{L_1L_2}|$ zweier windschiefer Geraden gilt:

$$d(g1, g2) = \left| \frac{[\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2]}{|\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2|} \right|$$

Lösung:

Zu a) Es gilt: $\overrightarrow{L_1L_2} \perp \vec{a}_1$ und $\overrightarrow{L_1L_2} \perp \vec{a}_2$ (1)

siehe Skizze :



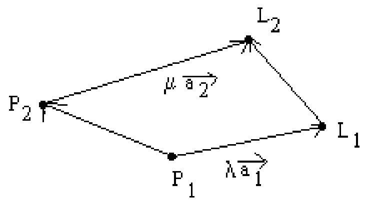
Weiterhin gilt:

$L_1 \in g_1$, d.h. $L_1 = P_1 + \lambda \vec{a}_1$ und $L_2 \in g_2$, d.h. $L_2 = P_2 + \mu \vec{a}_2$. (2)

Aus (1) folgt: $(\overrightarrow{L_1L_2}, \vec{a}_1) = 0$ und $(\overrightarrow{L_1L_2}, \vec{a}_2) = 0$ (3)

Aus (2) folgt: $L_2 - L_1 = P_2 + \mu \vec{a}_2 - (P_1 + \lambda \vec{a}_1)$ bzw. wegen $L_2 - L_1 = \overrightarrow{L_1L_2}$, $P_2 - P_1 = \overrightarrow{P_1P_2}$

$\overrightarrow{L_1L_2} = \overrightarrow{P_1P_2} - \lambda \vec{a}_1 + \mu \vec{a}_2$ (4) (siehe folgende Skizze).



Setzen wir (4) in die beiden Gleichungen (3) ein, so erhalten wir unter Berücksichtigung der Eigenschaften des Skalarproduktes zwei Gleichungen in λ und μ :

$$(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}_1) + \lambda(\vec{a}_1, \vec{a}_1) - \mu(\vec{a}_2, \vec{a}_1) = 0$$
$$(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}_2) + \lambda(\vec{a}_1, \vec{a}_2) - \mu(\vec{a}_2, \vec{a}_2) = 0$$

Diese lösen wir nach λ und μ auf.

Damit erhalten wir gemäß den Gleichungen (2) die Lotpunkte L_1 und L_2 und folglich auch den Abstand :

$$d(g_1, g_2) = |\overrightarrow{L_1L_2}|.$$

Zu b) Wir können auch die in der Übungsaufgabe genannte Formel für den Abstand herleiten:

Aus (1) : $\overrightarrow{L_1L_2} \perp \vec{a}_1$ und $\overrightarrow{L_1L_2} \perp \vec{a}_2$ folgt: $\overrightarrow{L_1L_2} = \alpha(\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2)$ (5)
d.h. $\overrightarrow{L_1L_2}$ ist parallel zu $(\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2)$.

Weiterhin ist nach (4):

$$\overrightarrow{L_1L_2} = \overrightarrow{P_1P_2} - \lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2 = \alpha(\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2) \qquad (6)$$

Daraus folgt:

$$|\overrightarrow{L_1L_2}| = |\alpha||\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2| \quad \text{bzw.} \quad |\alpha| = \frac{|\overrightarrow{L_1L_2}|}{|\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2|} \qquad (7)$$

Multiplizieren wir die Gleichung (6) skalar mit $\overrightarrow{L_1L_2}$, so erhalten wir:

$$\overrightarrow{L_1L_2} = \overrightarrow{P_1P_2} - \lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2 = \alpha(\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2) \mid \cdot\ \overrightarrow{L_1L_2}$$
$$\Leftrightarrow\ (\overrightarrow{L_1L_2}, \overrightarrow{L_1L_2}) = (\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{L_1L_2}) - \lambda(\vec{a}_1, \overrightarrow{L_1L_2}) + \mu(\vec{a}_2, \overrightarrow{L_1L_2})$$
$$\Leftrightarrow\ (\overrightarrow{L_1L_2}, \overrightarrow{L_1L_2}) = (\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{L_1L_2}) \quad \text{(wegen (3))}$$
$$\Leftrightarrow\ (\overrightarrow{L_1L_2}, \overrightarrow{L_1L_2}) = (\overrightarrow{P_1P_2}, \alpha(\vec{a}_1 \otimes a_2)) \quad \text{(wegen (6))}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\overrightarrow{L_1L_2}, \overrightarrow{L_1L_2}) = \alpha \cdot (\overrightarrow{P_1P_2}, (\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2))$$

$$\Leftrightarrow |(\overrightarrow{L_1L_2}, \overrightarrow{L_1L_2})| = |\alpha| \cdot |(\overrightarrow{P_1P_2}, (\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2))|$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{L_1L_2}|^2 = \frac{|\overrightarrow{L_1L_2}|}{|\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2|} \cdot |(\overrightarrow{P_1P_2}, (\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2))| \quad \text{(wegen (7))}$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{L_1L_2}| = \frac{|[\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2]|}{|\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2|}$$

Zu Aufgabe 5)
Durch die Gleichung x + 2 y + 2z = 6 sei eine Ebene im R^3 gegeben.

a) Geben Sie einen Vektor an, der senkrecht auf der Ebene steht!
b) Geben Sie einen Vektor an, der parallel zur Ebene verläuft!
c) Geben Sie die Ebene in parametrischer Form an!

Zu a) Der Normalenvektor ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dieser steht senkrecht auf der Ebene.

Zu b) Man bestimmt zwei Punkte P_1 und P_2, die in der Ebene liegen:

$P_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Der gesuchte zur Ebene parallele Vektor ist dann:

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zu c) Man bestimmt 3 Punkte P_1,P_2,P_3, die in der Ebene liegen: $P_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Der Aufpunkt ist dann P_1, die beiden Richtungsvektoren ergeben sich aus

$$\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Parameterdarstellung der Ebene:

$$\varepsilon = \left\{ P \mid P = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in R \right\}.$$

Zu Aufgabe 6)

Eine Ebene E sei durch den Aufpunkt $P_E=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ und den Normalenvektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ gegeben.

a) Geben Sie die Ebene in nichtparametrischer und in Parameterform an!
b) Skizzieren Sie die Lage der Ebene im karthesischen Koordinatensystem!

Lösung:
Zu a)
nichtparametrisch: 2y + z =5
parametrisch:
Man bestimmt 3 Punkte P_1,P_2,P_3, die in der Ebene liegen, aber nicht auf einer Geraden::

$P_1=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, P_3=\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}$. Der Aufpunkt ist dann P_1, die beiden Richtungsvektoren

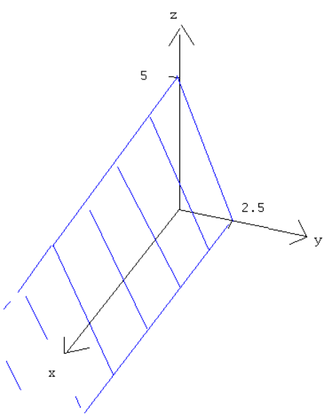
ergeben sich aus $\vec{a}=\overrightarrow{P_1P_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}, \vec{b}=\overrightarrow{P_1P_3}=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$.

Parameterdarstellung der Ebene:

$$\varepsilon=\left\{P \mid P=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}, \lambda,\mu\in R\right\}$$

Zu b)
Wir gehen von der nichtparametrischen Gestalt der Ebene aus:
$E=\{(x,y,z) \mid 2y+z=5, \quad x\in R \quad \textit{beliebig}\}$
Die Schnittpunkte mit der y- und z-Achse Sy und Sz sind: Sy=(0,2.5,0) und Sz=(0,0,5).

Skizze der Ebene: Die Ebene lehnt schräg an der x-z-Ebene und verläuft parallel zur x-Achse.



Zu Aufgabe 7)
Gegeben seien die Ebenen E1 , E2 mit den Aufpunkten Q1 bzw. Q2 und den Normalenvektoren $\vec{n}_1, \vec{n}_2$. Beschreiben Sie die jeweilige Lage der Ebenen zueinander, d.h., füllen Sie die rechte Seite folgender Tabelle aus!

Lösung:

Lage	Kriterium
E1 schneidet E2	$\vec{n}_1 \otimes \vec{n}_2 \neq \vec{0}$
E1 ist parallel zu E2	$\vec{n}_1 \otimes \vec{n}_2 = \vec{0} \wedge (\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{n}_1) \neq 0$
E1 ist identisch zu E2	$\vec{n}_1 \otimes \vec{n}_2 = \vec{0} \wedge (\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{n}_1) = 0$

Zu Aufgabe 8)
Durch die Gleichung x + 2 y + 2z = 6 sei eine Ebene É1 im R^3 gegeben.

Eine Ebene E2 sei durch den Aufpunkt $P_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

Welche Lage haben die beiden Ebenen zueinander?

Lösung:

Normalenvektor der Ebene E1 ist: $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Damit ist

$$\vec{n} \otimes \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}.$$ D.h., die Ebenen schneiden sich!

Zu Aufgabe 9)

Seien $E1 = \{P \in R^3 \mid P = P_1 + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}, \quad \lambda, \mu \in R\}$ und $E2 = \{P \in R^3 \mid (\overrightarrow{P_2P}, \vec{n}) = 0\}$ zwei Ebenen mit den Aufpunkten P_1 und P_2.

Es gilt $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}] = 0$ und $(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{n}) = 0$.
Welche Lage haben die Ebenen zueinander?
a) windschief b) schneiden sich, setehen aber nicht senkrecht aufeinander
c) stehen senkrecht aufeinander d) parallel e) identisch f) andere Lage

Lösung: c)

Zu Aufgabe 10)

Geben Sie unter Verwendung von $\vec{a}, \vec{b}, P_g, P_E$ und $\vec{a}_g$ Kriterien an, die die Lage einer Geraden g und einer Ebene E zueinander beschreiben Dabei sind

$$g = \{P \mid P = P_g + \lambda \vec{a}_g, \lambda \in R\} \quad \text{und} \quad E = \{P \mid P = P_E + \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \quad \alpha, \beta \in R\}.$$

a) Wann ist g ‖ E ?
b) Wann ist g ⊆E ?
c) Wann schneidet die Gerade g die Ebene E ?

Lösung:

Zu a) g ‖ E $\Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{a}_g$ liegen in einer Ebene und $P_g \notin E$

$$\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}_g] = 0 \wedge (\overrightarrow{P_E P_g}, (\vec{a} \otimes \vec{b})) \neq 0$$

Zu b) g ⊆E $\Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{a}_g$ liegen in einer Ebene und $P_g \in E$

$$\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}_g] = 0 \wedge (\overrightarrow{P_E P_g}, (\vec{a} \otimes \vec{b})) = 0$$

Zu c) g x E $\Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{a}_g$ liegen nicht in einer Ebene

$$\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}_g] \neq 0$$

Zu Aufgabe 11)

Gegeben seinen die Geraden g1 und g2 mit den Aufpunkten P1 bzw.P2 und Richtungsvektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ und die Ebenen E1 , E2 mit den Aufpunkten Q1 bzw. Q2 und den Normalenvektoren $\vec{n}_1, \vec{n}_2$. Beschreiben Sie die jeweilige Lage der Geraden und Ebenen zueinander, d.h., füllen Sie die rechte Seite folgender Tabelle aus!

Lösung:

Kriterium	**Lage**
$\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2 = \vec{0} \wedge \overrightarrow{P_1 P_2} \otimes \vec{a}_1 = \vec{0}$	g1 = g2
$(\vec{a}_1, \vec{n}_1) \neq 0$	g1 X E1
$\vec{n}_1 \otimes \vec{n}_2 = \vec{0} \wedge (\overrightarrow{Q_1 Q_2}, \vec{n}_1) = 0$	E1 = E2