HTW	Lösungen zu Übung 7 MST Mathematik I Geometrie von Geraden und Ebenen Vektorräume und affine Räume Prof. Dr.B.Grabowski

Zu Aufgabe 1

Gegeben sei eine Ebene $\varepsilon_1 = \{P / P = P_0 + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}, \quad \lambda \in R, \mu \in R\} \subseteq \mathrm{R}^3$ mit

$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Weiterhin sei eine Gerade

$g = \{Q / Q = P_1 + \lambda\vec{c}, \lambda \in R\}$ gegeben mit : $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Ebene ε_2 in parametrischer Form, die senkrecht auf ε_1 steht und deren Schnittgerade mit ε_1 die Gerade g ist!

b) Bestimmen Sie eine Ebene, die parallel zu ε_1 im Abstand 3 verläuft!

Lösung:

Zu a) (Bemerkung: Es ist $g \subseteq \varepsilon_1$, denn $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$).

Bestimmung von ε_2 :

Aufpunkt: $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ (= Aufpunkt der Geraden)

Richtungsvektoren: $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{n}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ (Richtungsvektor der Geraden und der Normalenvektor von ε_1).

$$\varepsilon_2 = \{P \mid P = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in R, \mu \in R\}$$

Zub) Wir berechnen zunächst den normierten Normalenvektor $\vec{n}_{1_0}$ der Ebene ε_1 :

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } |\vec{n}_1| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \Rightarrow \vec{n}_{1_0} = \frac{\vec{n}_1}{|\vec{n}_1|} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Aufpunkt der Ebene ε_3, die im Abstand 3 parallel zu ε_1 verläuft, ist dann:

$P_3 = P_0 + 3\vec{n}_{1_0}$.

Die beiden Richtungsvektoren der Ebene ε_3 sind die gleichen, wie die der Ebene ε_1.

Zu Aufgabe 2

Berechnen Sie die Entfernung eines Objektes im Punkt P=(1,1,-5) von der Ebene 12x+13y+5z+2=0!

Lösung:

Der Abstand ist:

$d(P,E)=\frac{|(\vec{n},\overrightarrow{P_E P})|}{|\vec{n}|}$, wobei P_E ein (Auf)Punkt der Ebene ist.

Wir wählen den Aufpunkt $P_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2/5 \end{pmatrix}$ und erhalten für den Abstand:

$$d(P,E)=\frac{|(\vec{n},\overrightarrow{P_E P})|}{|\vec{n}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -23/5 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{12^2+13^2+5^2}} = \frac{2}{\sqrt{338}} = 0{,}109$$

Zu Aufgabe 3

Seien eine Ebene E mit dem Aufpunkt $P_E=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und eine Gerade g mit dem Aufpunkt $P_g=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und dem Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Welche Lage hat g zu E?

b) Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$. Zerlegen Sie $\vec{v}$ in die Summe zweier Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ so, dass $\vec{v}_1$ senkrecht auf E und $\vec{v}_2$ parallel zu g liegen!

Lösung:

Zu a)

$(\vec{a}, \vec{n}) = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{n} \Rightarrow$ g ||E oder g∈E.

$(\overrightarrow{P_E P_g}, \vec{n}) = 0 \Rightarrow P_g \in E$

$\Rightarrow$ g∈E.

Zu b)

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad mit\; i) \vec{v}_1 \perp E$$

und $\quad ii) \vec{v}_2 \parallel g$.

Es gilt: $\vec{v}_1 \perp E \;\Leftrightarrow \vec{v}_1 = \lambda \vec{n}$ und $\vec{v}_2 \parallel g \Leftrightarrow \vec{v}_2 = \mu \vec{a}$. Daraus folgt:

$$(\vec{v}, \vec{a}) = (\vec{v}_1, \vec{a}) + (\vec{v}_2, \vec{a}) = \lambda(\vec{n}, \vec{a}) + \mu(\vec{a}, \vec{a}) = 0 + \mu |\vec{a}|^2$$ und wir erhalten:

$$\Rightarrow \mu = \frac{(\vec{v}, \vec{a})}{|\vec{a}|^2} \underset{\substack{Werte \\ einsetzen}}{\Rightarrow} \mu = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}{6} \Leftrightarrow \mu = 3$$

Daraus folgt das Ergebnis: $\vec{v}_2 = 3\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_1 = \vec{v} - \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Zu Aufgabe 4

Durch die Gleichung x + 2 y + 2z = 6 sei eine Ebene É1 im R^3 gegeben.

Eine Ebene E2 sei durch den Aufpunkt $P_E = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ und den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ gegeben.

Zeigen Sie, dass beide Ebenen sich schneiden und berechnen Sie Schnittwinkel und Schnittgerade!

Lösung:

Der Normalenvektor der ersten Ebene ist

$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$. Für die Normalenvektorn gilt: $\vec{n}_1 \otimes \vec{n}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix} \neq \vec{0}$

Demzufolge sind die Normalenvektoren nicht parallel und folglich müssen sich die Ebenen schneiden!

Schnittwinkel:

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{6}{3\sqrt{5}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 26{,}57°$$

Schnittgerade:

Die Normalengleichung der 2. Ebene lautet:

$$(\vec{n}_2, \overrightarrow{P_E P}) = 0 \Leftrightarrow 2y + z = 5$$

Auf der Schnittgeraden liegen alle Punkte P=(x,y,z), die sowohl die Gleichung der ersten als auch die Gleichung der 2. Ebene erfüllen.
Für die Punlkte P=(x,y,z) der Schnittgeraden gilt also:

x + 2 y + 2z = 6
$2y + z = 5$

Wir lösen das Gleichungssystem :
Aus der letzen Gleichung folgt:

$z = 5 - 2y$

Setzen wir das in die erste Gleichung ein, so erhalten wir:
x = 6 –2y-2z = 6 –2y –10 +4y = -4 + 2y

Dh. für alle Punkte, die auf beiden Ebenen liegen gilt:

x = -4 + 2y
y = y beliebig
z = 5 -2y

Schreiben wir das in Vektorschreibweise auf, so erhalten wir eine Gerade, die Schnittgerade :

$$g = \left\{ P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid P = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \lambda \in R \right\}.$$

Zu Aufgabe 5

a) Geben Sie 2 linear unabhängige Vektoren im R^3 an!
b) Geben Sie 3 linear unabhängige Vektoren im R^3 an!
c) Geben Sie eine Basis im R^3 an!
d) Geben Sie eine Basis im R^4 an!
e) Geben Sie mindestens 2 Erzeugendensysteme des R^3 an, die keine Basis sind!
f) Geben Sie 4 linear abhängige Vektoren im R^3 an!

Lösung: Die Lösungen sind nicht eindeutig.
Mögliche Lösungen sind:

Zu a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **Zu b)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **Zu c)** $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ **zu d)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

zu e) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **und** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

zu f) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Zu Aufgabe 6

Welche der 4 Mengen von Vektoren bilden keine Basis im R^3? (Begründung!)

$$M0=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\},\quad M1=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}\right\},$$

$$M2=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\right\},\qquad M3=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\right\}.$$

Lösung:

M0 keine Basis, da kein EZS (dazu werden mindestens 3 Vektoren benötigt!)
M1 keine Basis, da di 3 Vektoren linear abhängig sind (Spatprodukt = 0)
M2 ist eine Basis!
M3 keine Basis, da 4 Vektoren im R^3 immer linear abhängig sind!

Zu Aufgabe 7
Untersuchen Sie, ob folgende Vektoren linear unabhängig sind:

a) $\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/2\\1\\3/2\end{pmatrix}$

b) $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix},\quad \vec{a}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \vec{a}_3=\begin{pmatrix}0\\2\\-2\\4\end{pmatrix},\quad \vec{a}_4=\begin{pmatrix}3\\6\\1\\8\end{pmatrix}$

Lösung:

Zu a) Für das Spatprodukt gilt:
$\left[\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}\right]=0$. D.h., die 3 Vektoren liegen in einer Ebene. D.h., sie sind nicht linear unabhängig!

Zu b) Für das Kreuzprodukt gilt:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$. Demzufolge sind die beiden Vektoren nicht parallel, d.h., sie sind linear unabhängig!

Zu c)
Es gilt:

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 + \lambda_4 \vec{a}_4 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{cccccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & + & 3\lambda_4 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & & & + & 2\lambda_3 & + & 6\lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & + & \lambda_4 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & & & + & 4\lambda_3 & + & 8\lambda_4 & = & 0 \end{array}$$

Es gibt verschiedene Lösungsverfahren. Wir machen hier folgendes:
Wir diagonalisieren das Gleichungssystem (man nennt dieses Verfahren den Gausschen Algorithmus), indem wir geschickt das Vielfache einer Zeile von einer anderen abziehen.
Dabei formen wir das Gleichungssystem äquivalent um, d.h. es ändert sich die Lösungsmenge nicht bei diesen Umformungen.

1. Schritt:
Die 1. Zeile lassen wir unverändert.
Wir ziehen von der 2. Zeile 2 mal die 1. Zeile ab.
Wir ziehen von der 3. Zeile 1 mal die 1.Zeile ab
Wir ziehen von der 4. Zeile 2 mal die 1.Zeile ab

Ergebnis:

$$\begin{array}{cccccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & + & 3\lambda_4 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & & & + & 2\lambda_3 & + & 6\lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & + & \lambda_4 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & & & + & 4\lambda_3 & + & 8\lambda_4 & = & 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{cccccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & + & 3\lambda_4 & = & 0 \\ & - & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & & & = & 0 \\ & & & - & 2\lambda_3 & - & 2\lambda_4 & = & 0 \\ & & & & 4\lambda_3 & + & 2\lambda_4 & = & 0 \end{array}$$

2. Schritt:
Die 1. , 2. und 3. Zeile lassen wir unverändert.
Wir addieren zur 4. Zeile 2 mal die 3. Zeile

Ergebnis:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & + & 3\lambda_4 & = & 0 \\ & - & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & & & = & 0 \\ & & & - & 2\lambda_3 & - & 2\lambda_4 & = & 0 \\ & & & & 4\lambda_3 & + & 2\lambda_4 & = & 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & + & 3\lambda_4 & = & 0 \\ & - & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & & & = & 0 \\ & & & - & 2\lambda_3 & - & 2\lambda_4 & = & 0 \\ & & & & & - & 2\lambda_4 & = & 0 \end{array}$$

Unser Ausgangsgleichungssystem ist nun äquivalent in eine Diagonalform überführt worden:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & + & 3\lambda_4 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & & & + & 2\lambda_3 & + & 6\lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & + & \lambda_4 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & & & + & 4\lambda_3 & + & 8\lambda_4 & = & 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & + & 3\lambda_4 & = & 0 \\ & - & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & & & = & 0 \\ & & & - & 2\lambda_3 & - & 2\lambda_4 & = & 0 \\ & & & & & - & 2\lambda_4 & = & 0 \end{array}$$

Dieses diagonalisierte Gleichungssystem können wir schrittweise von unten nach oben lösen, es ergibt sich als einzige Lösung:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Folglich gilt:

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 + \lambda_4\vec{a}_4 = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Demzufolge sind die 4 Vektoren unter c) linear unabhängig!

Zu Aufgabe 8

a) Geben Sie die Menge aller Vektoren im R^2 an, die parallel zur Geraden y=2x+1 verlaufen! Welche Dimension hat dieser Vektorraum?
b) Geben Sie einen konkreten affinen Raum der Dimension 1 im R^3 an!
c) Geben Sie einen konkreten affinen Raum der Dimension 2 im R^3 an!
d) Geben Sie einen konkreten affinen Raum der Dimension 3 im R^3 an!

Lösung:

Zu a) $V = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda \in R \right\}$, Dim(V) = 1.

Die Lösungen zu b),c),d) sind nicht eindeutig. Wir haben hier das Folgende:

Zu b)

Z.B. eine bestimmte Gerade im R^3: (Alle Additionen von Punkt und Vektor, Vektor und Vektor und die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar sind komponentenweise definiert)

$$A = \left\{ P \mid P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in R \right\}$$

Zu c)
Z.B. eine bestimmte Ebene im R^3: (Alle Additionen von Punkt und Vektor, Vektor und Vektor und die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar sind komponentenweise definiert)

$$A = \left\{ P \mid P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in R, \mu \in R \right\}$$

Zu d)
Die Menge aller Punkte i m R^3: (Alle Additionen von Punkt und Vektor, Vektor und Vektor und die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar sind komponentenweise definiert)

$$A = \left\{ P \mid P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in R, \mu \in R, \gamma \in R \right\}$$

Zu Aufgabe 9
Welche der folgenden Mengen ist ein Vektorraum (VR), welche ein affiner Raum (AR) und welche weder noch (Begründung)? Wenn es sich um einen VR oder AR handelt, so geben Sie die Dimension des Raumes, die Basis und ggf. den Aufpunkt an!

a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} \mid \quad t \in R \right\}$ b) $M = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} \mid \quad t \in R \right\}$ c) $M = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} \mid \quad t > 0 \right\}$

Lösung:

Zu a) Es ist:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} \mid \quad t \in R \right\} = \left\{ \vec{v} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in R \right\}.$$ Damit ist M ein Vektorraum der Dimension 1.

Zu b) Es ist:

$$M = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} \mid \quad t \in R \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in R \right\}.$$

Damit ist M ein affiner Raum der Dimension 1 (eine Gerade).

Zu c)

$$M = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} \mid \quad t > 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, t > 0 \right\}$$

D.h., M ist kein Vektorraum, weil der Nulvektor nicht in M ist.
M ist aber auch kein affiner Raum, weil die Menge der Vektoren, die zum Aufpunkt (3,0,0) addiert werden, kein Vektorraum ist!

Zu Aufgabe 10

3 Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sind linear unabhängig, falls gilt:

„aus $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 = \vec{0}$ folgt: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$".

Seien $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 3 linear unabhängige Vektoren. Seien $\vec{b}_1 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$, $\vec{b}_2 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_3$, $\vec{b}_3 = \vec{a}_2 + \vec{a}_3$.

Untersuchen Sie unter Verwendung der obigen Definition der linearen Unabhängigkeit, ob $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ linear unabhängig sind!

<u>Lösung:</u>

$$\lambda_1\vec{b}_1 + \lambda_2\vec{b}_2 + \lambda_3\vec{b}_3 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \lambda_1(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) + \lambda_2(2\vec{a}_1 - \vec{a}_3) + \lambda_3(\vec{a}_2 + \vec{a}_3) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 + 2\lambda_2)\vec{a}_1 + (\lambda_1 + \lambda_3)\vec{a}_2 + (\lambda_3 - \lambda_2)\vec{a}_3 = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ Wegen der Linearen Unabhängigkeit von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ muss gelten:

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$$
$$\lambda_1 + \lambda_3 = 0$$
$$\lambda_3 - \lambda_2 = 0$$

Wir lösen das GS schritweise auf und erhalten dann $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

D.h., $\vec{b}_1, \vec{b}_2,\ \vec{b}_3$ sind linear unabhängig.

Zu Aufgabe 11
Wir betrachten Funktionen mit den rellen Zahlen als Definitionsbereich. Die Operationen + (Addition zweier Funktionen) und · (Multiplikation einer Funktion mit einem Skalar) seien wie folgt definiert:

(f+g)(x) := f(x) + g(x) für alle $x \in R$
(λ·f)(x) := λ·f(x) für alle $x \in R$

Auf der Basisi dieser beiden Operatoren betrachten wir den Vektorraum V aller Schwingungen der Frequenz 1:
$V = \{ f : x \in R \to f(x) \in R \mid \quad f(x) = \alpha \sin(x) + \beta \cos(x), \alpha \in R, \beta \in R \}$

a) Zeigen Sie, dass die beiden Funktionen $f_1(x) = \sin(x)$, $f_2(x) = \cos(x)$
linear unabhängig sind, also eine Basis im Vektorraum (V, + , ·) bilden!

b) Wie groß ist die Dimension von V?

c) Zeigen Sie: zwei Schwingungen $g1(x) = \alpha_1 \sin(x) + \beta_1 \cos(x)$ und $g2(x) = \alpha_2 \sin(x) + \beta_2 \cos(x)$, $x \in R$ sind identisch für alle $x \in R$, falls die Koeffizienten übereinstimmen, d.h. falls gilt : $\alpha_1 = \alpha_2$ und $\beta_1 = \beta_2$.

Lösung:

Zu a)
Sei $\alpha \sin(x) + \beta \cos(x) = 0$ für alle $x \in R$.
Dann gilt diese Gleichung auch speziell für x = 0 und für x=π/2:

$$\begin{aligned} \alpha \sin(0) \quad + \beta \cos(0) \quad &= 0 \\ \alpha \sin(\pi/2) + \beta \cos(\pi/2) &= 0 \end{aligned}$$

⇒ (weil sin(0)=0, cos(0)=1, sin(π/2) = 0, cos(π/2)=0 folgt:

$$\beta = 0$$
$$\alpha = 0$$

Demzufolge sind die beien Funktionen sin(x) und cos(x) linear unabhängig!
Zu b)
dim(V) = 2

Zu c)

Es gilt:

$$g1(x) = g2(x) \quad \forall x \in R$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1 \sin(x) + \beta_1 \cos(x) = \alpha_2 \sin(x) + \beta_2 \cos(x) \quad \forall x \in R$$
$$\Leftrightarrow (\alpha_1 - \alpha_2)\sin(x) + (\beta_1 - \beta_2)\cos(x) = 0 \quad \forall x \in R$$

Weil sin(x) und cos(x) linear unabhängig sind folgt daraus:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0$$
$$\beta_1 - \beta_2 = 0$$

und folglich ist:

$$\alpha_1 = \alpha_2$$
$$\beta_1 = \beta_2$$