HTW	Übung 7 MST Mathematik I Geometrie von Geraden und Ebenen Prof. Dr.B.Grabowski Vektorräume, affine Räume, Basen, EZS, Lineare Unabhängigkeit

Aufgabe 1

Gegeben sei eine Ebene $\varepsilon_1 = \{P / P = P_0 + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}, \quad \lambda \in R, \mu \in R\} \subseteq \mathrm{R}^3$ mit

$P_0 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$. Weiterhin sei eine Gerade

$g = \{Q / Q = P_1 + \lambda\vec{c}, \lambda \in R\}$ gegeben mit : $P_1 = \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Ebene ε_2 in parametrischer Form, die senkrecht auf ε_1 steht und deren Schnittgerade mit ε_1 die Gerade g ist!

b) Bestimmen Sie eine Ebene, die parallel zu ε_1 im Abstand 3 verläuft!

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Entfernung eines Objektes im Punkt P=(1,1,-5) von der Ebene 12x+13y+5z+2=0!

Aufgabe 3

Seien eine Ebene E mit dem Aufpunkt $P_E = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ und dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ und eine Gerade

g mit dem Aufpunkt $P_g = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$ und dem Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ gegeben.

a) Welche Lage hat g zu E?

b) Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\1\\8\end{pmatrix}$. Zerlegen Sie $\vec{v}$ in die Summe zweier Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ so, dass $\vec{v}_1$ senkrecht auf E und $\vec{v}_2$ parallel zu g liegen!

Aufgabe 4

Durch die Gleichung x + 2 y + 2z = 6 sei eine Ebene É1 im R^3 gegeben.

Eine Ebene E2 sei durch den Aufpunkt $P_E = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ und den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ gegeben.

Zeigen Sie, dass beide Ebenen sich schneiden und berechnen Sie Schnittwinkel und Schnittgerade!

Aufgabe 5

a) Geben Sie 2 linear unabhängige Vektoren im R^3 an!
b) Geben Sie 3 linear unabhängige Vektoren im R^3 an!
c) Geben Sie eine Basis im R^3 an!
d) Geben Sie eine Basis im R^4 an!
e) Geben Sie mindestens 2 Erzeugendensysteme des R^3 an, die keine Basis sind!
f) Geben Sie 4 linear abhängige Vektoren im R^3 an!

Aufgabe 6

Welche der 4 Mengen von Vektoren bilden keine Basis im R^3? (Begründung!)

$$M0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad M1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\},$$

$$M2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}, \qquad M3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 7

Untersuchen Sie, ob folgende Vektoren linear unabhängig sind:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

Aufgabe 8

a) Geben Sie die Menge aller Vektoren im R^2 an, die parallel zur Geraden y=2x+1 verlaufen! Welche Dimension hat dieser Vektorraum?
b) Geben Sie einen konkreten affinen Raum der Dimension 1 im R^3 an!
c) Geben Sie einen konkreten affinen Raum der Dimension 2 im R^3 an!
d) Geben Sie einen konkreten affinen Raum der Dimension 3 im R^3 an!

Aufgabe 9
Welche der folgenden Mengen ist ein Vektorraum (VR), welche ein affiner Raum (AR) und welche weder noch (Begründung)? Wenn es sich um einen VR oder AR handelt, so geben Sie die Dimension des Raumes, die Basis und ggf. den Aufpunkt an!

a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} \mid \quad t \in R \right\}$ b) $M = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} \mid \quad t \in R \right\}$ c) $M = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} \mid \quad t > 0 \right\}$

Aufgabe 10
3 Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sind linear unabhängig, falls gilt:

„aus $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 = \vec{0}$ folgt: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$“.

Seien $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 3 linear unabhängige Vektoren. Seien $\vec{b}_1 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$, $\vec{b}_2 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_3$, $\vec{b}_3 = \vec{a}_2 + \vec{a}_3$.

Untersuchen Sie unter Verwendung der obigen Definition der linearen Unabhängigkeit, ob $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ linear unabhängig sind!

Aufgabe 11
Zeigen Sie, dass die beiden Funktionen $f_1(x) = \sin(x)$, $f_2(x) = \cos(x)$
linear unabhängig sind, also eine Basis im Vektorraum

$$V = \{ f : x \in R \to f(x) \in R \mid \quad f(x) = \alpha \sin(x) + \beta \cos(x), \alpha \in R, \beta \in R \}$$

aller Schwingungen der Frequenz 1 darstellen.