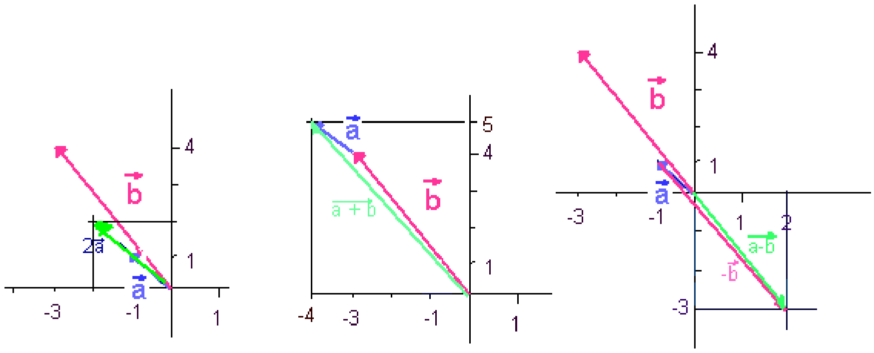
Zu Aufgabe 1

Zu a) Komponentenweise Addition, Subtraktion und Multiplikation mit Skalar:

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}-1+(-3)\\1+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix},\qquad 2\vec{a}=\begin{pmatrix}2\cdot(-1)\\2\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\8\end{pmatrix},\qquad \vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}-1-(-3)\\1-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix},$$



Zu b)

$$|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2},\qquad |2\vec{b}|=2|\vec{b}|=2\sqrt{(-3)^2+4^2}=2\sqrt{25}=10$$

Zu Aufgabe 2

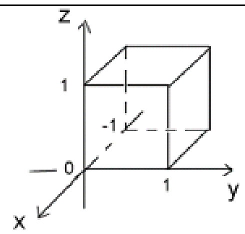
a) $\vec{e}_a=-\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=-\frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}-1\\4\\-3\end{pmatrix}$

b) $Q=P+20\vec{e}_a=\begin{pmatrix}3\\1\\-5\end{pmatrix}+\frac{20}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+\frac{20}{\sqrt{26}}\\1-\frac{80}{\sqrt{26}}\\-5+\frac{60}{\sqrt{26}}\end{pmatrix}$

grabowski@htw-saarland.de

Zu Aufgabe 3

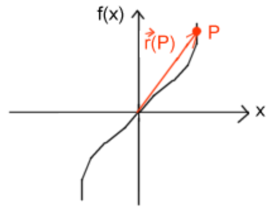
a) Geben Sie alle Ortsvektoren an, die zu den Eckpunkten des folgenden Einheitswürfels zeigen!



Lösung:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},$$

b) Stellen Sie die Punkte, die auf der Kurve y = f(x)=2x^3 liegen durch Ihre Ortsvektoren dar!



Lösung:

$$P=\begin{pmatrix}x\\2x^3\end{pmatrix}, x\in R$$

c) Stellen Sie alle Punkte, die auf dem Kreis mit dem Radius 2 und dem Mittelpunkt (3,4) liegen, durch ihre Ortsvektoren dar!

Lösung:

$$P=\begin{pmatrix}3+2\cos(\alpha)\\4+2\sin(\alpha)\end{pmatrix}, \alpha\in[0,2\pi].$$

oder alternativ:

$$P=\begin{pmatrix}x-3\\4+\sqrt{4-(x-3)^2}\end{pmatrix}\ oder\ P=\begin{pmatrix}x-3\\4-\sqrt{4-(x-3)^2}\end{pmatrix}, -2\le x-3\le 2.$$

grabowski@htw-saarland.de

Zu Aufgabe 4

zu a)

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

Dann gilt: $\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \mu b_1 \\ \lambda a_2 + \mu b_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n + \mu b_n \end{pmatrix}$

und
$$(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}, \vec{c}) = \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \mu b_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n + \mu b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i + \mu b_i) c_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i c_i + \mu b_i c_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda a_i c_i + \sum_{i=1}^{n} \mu b_i c_i$$
$$= \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i c_i + \mu \sum_{i=1}^{n} b_i c_i$$
$$= \lambda (\vec{a}, \vec{c}) + \mu (\vec{b}, \vec{c}) \quad \text{qed.}$$

Zu b)

Es gilt für beliebige Vektoren $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2$. (Skalarprodukt = Länge zum Quadrat).

Weiterhin gilt $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

(Ihr Skalarprodukt ist 0).

Demzufolge erhalten wir:

$$(\vec{a} + 2\vec{b}, 3\vec{a} - \vec{b}) = (\vec{a}, 3\vec{a}) + (2\vec{b}, 3\vec{a}) + (\vec{a}, -\vec{b}) + (2\vec{b}, -\vec{b}) = 3(\vec{a}, \vec{a}) + 6(\vec{b}, \vec{a}) - (\vec{a}, \vec{b}) - 2(\vec{b}, \vec{b})$$
$$= 3|\vec{a}|^2 - 2|\vec{b}|^2 = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1^2 = 1$$

Zu c)

Hier gibt es zwei Möglichkeiten.

1. Variante: man zerlegt das Skalarprodukt:
   $(\vec{a} + 2\vec{b}, \vec{a} - 3\vec{c}) = |\vec{a}|^2 - 3(\vec{a}, \vec{c}) + 2(\vec{b}, \vec{a}) - 6(\vec{b}, \vec{c})$ und berechnet die rechte Seite.
2. Variante: man rechnet erst $\vec{a} + 2\vec{b}$ und $\vec{a} - 3\vec{c}$ aus und dann das Skalarprodukt der Ergebnisvektoren:

   Es ist: $\vec{a} + 2\vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix}$ und $\vec{a} - 3\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 23 \end{pmatrix}$ und folglich ist:

$$(\vec{a} + 2\vec{b}, \vec{a} - 3\vec{c}) = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 23 \end{pmatrix} = (-7)(-4) + 9(-5) + 13 \cdot 23 = 282$$

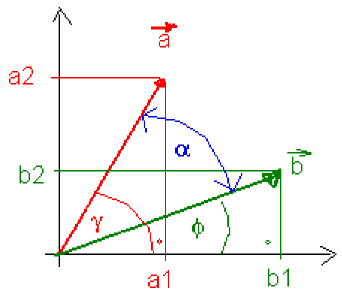
Zu Aufgabe 5

Zu a)

Satz: Sei α der durch zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ eingeschlossene Winkel (0 ≤ α ≤ 180°).

Dann gilt: $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos(\alpha)$

Beweis: Skizze:



Man kann die Vektorkoordinaten in Polarkoordinaten darstellen:
(Gesetze im rechtwinkligen Dreieck):
z.B. gilt:

$a1 = |\vec{a}| \cos(\gamma)$ und $a2 = |\vec{a}| \sin(\gamma)$

Es gilt (siehe Skizze):

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a1 \cdot b1 + a2 \cdot b2$$
$$= |\vec{a}| \cos(\gamma) |\vec{b}| \cos(\phi) + |\vec{a}| \sin(\gamma) |\vec{b}| \sin(\phi)$$
$$= |\vec{a}||\vec{b}| (\cos(\gamma)\cos(\phi) + \sin(\lambda)\sin(\phi))$$
$$= |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\gamma - \phi)$$
$$= |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\alpha)$$

qed.

Zu b) Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$. Welchen Winkel schließt $\vec{a}$ mit der x- Achse ein?

Lösung: Sei α der Winkel zwischen $\vec{a}$ und x-Achse, $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ der Einheitsvektor auf der x-Achse

und ax die erste Komponente von $\vec{a}$. Dann gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{(\vec{a}, \vec{e}_x)}{|\vec{a}||\vec{e}_x|} = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{-2}{\sqrt{20}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -0{,}4472 \Rightarrow \alpha = 63{,}43°$$

Zu c)

Beweis: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0$

Für 2 senkrecht aufeinander stehende Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt für den eingeschlossene Winkel : $\alpha = 90°$ und es ist $\cos(90°)=0$.

Daraus folgt:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \alpha = 90° \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos(\alpha) = 0$$

q.e.d

Zu Aufgabe 6

Damit die drei Vektoren überhaupt ein Dreieck bilden, muss die Summe von zwei der Vektoren den dritten ergeben. Dies gilt für : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

Wenn es sich dabei um ein rechtwinkliges Dreieck handeln soll, muss der Satz des Pythagoras gelten : $|\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 = |\vec{c}|^2$

$(1+16+4)+(4+4+9)=(1+36+1)$ stimmt!

Winkel :

$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^o$ *denn* $(\vec{a}, \vec{b}) = 0.$

Weiterhin ist (mit $\arccos = \cos^{-1}$)

$$\angle(\vec{a}, \vec{c}) = \arccos(\frac{|\vec{a}|}{|\vec{c}|}) = \arccos(\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{38}}) \approx 41{,}9^o$$

$$\angle(\vec{b}, \vec{c}) = \arccos(\frac{\left|\vec{b}\right|}{|\vec{c}|}) = \arccos(\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{38}}) \approx 48{,}1^o$$

Flächeninhalt :

$$F = Grundlinie * Höhe / 2$$

$$F = \frac{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|}{2} = \frac{\sqrt{21} * \sqrt{17}}{2} \approx 9{,}44$$

Seitenlängen:

$|\vec{a}| = \sqrt{21} \approx 4{,}58$ $\quad\left|\vec{b}\right| = \sqrt{17} \approx 4{,}123$ $\quad|\vec{c}| = \sqrt{38} \approx 6{,}16$

Zu Aufgabe 7

Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$. Geben Sie einen Vektor an, der senkrecht auf $\vec{a}$ steht, mit $\vec{b}$ einen Winkel von 30° einschließt und die Länge 2 hat !

Lösung:
Für den anzugebenden Vektor $\vec{c}$ muss gelten:
1) $(\vec{a}, \vec{c}) = 0$
2) $|\vec{c}| = 2$
3) $\cos(30°) = \dfrac{(\vec{c}, \vec{b})}{|\vec{c}||\vec{b}|}$

Aus 3) folgt: 4) $\cos(30°) = 0{,}866 = \dfrac{(\vec{c}, \vec{b})}{2\sqrt{74}}$

Aus 1), 2) und 4) ergeben sich folgende Gleichungen für die Koordinaten von $\vec{c}$:

(1) -c1 + c2 -c3 = 0
(2) $c1^2 + c2^2 + c3^2 = 4$
(3) -c1 + 4 c2 + 7c3 = 14,9

Wir wählen jetzt die Koordinaten so, dass diese 3 Gleichungen erfüllt sind.

Aus (1) folgt: (1') c1 = c2 – c3
Aus (3) und (1) folgt: (3'): c2 = (14,9 – 8 c3)/3

Setzen wir das in (1) ein, so ergibt sich: (1'') c1= (14,9 – 11c3)/3

Aus (2), (3') und (1'') ergibt sich:

$$c1^2 + c2^2 + c3^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow (14{,}9 - 11c3)^2 + (14{,}9 - 8c3)^2 + 9c3^2 = 36$$
$$\Leftrightarrow 194c3^2 - 566{,}2c3 + 408{,}02 = 0$$
$$\Leftrightarrow c3^2 - 2{,}919c3 + 2{,}104 = 0$$
$$\Leftrightarrow c3_{1/2} = 1{,}4595 \pm \sqrt{0{,}026} = \begin{Bmatrix} 1{,}621 \\ 1{,}298 \end{Bmatrix}$$

Die Lösung für c1, c2, c3 ist nicht eindeutig.

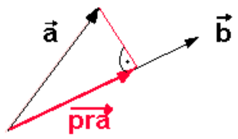
Nehmen wir z.B. den ersten Wert für c3, so erhalten wir:

c1=-0,977, c2 = 0,644 , c3=1, 621 bzw. als Lösungsvektor:

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} -0{,}977 \\ 0{,}644 \\ 1{,}621 \end{pmatrix}$$

Zu Aufgabe 8

a) $\overrightarrow{pra}$ bezeichnet man als Projektion des Vektors $\vec{a}$ auf den Vektor $\vec{b}$.



Leiten Sie eine Formel für $\overrightarrow{pra}$ her, die von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ abhängt!

b) Berechnen Sie die Projektion des Vektors

$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf den Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Zeichnen Sie die 2 Vektoren in ein Koordinatensystem und veranschaulichen Sie sich die Projektion.

Zu a)

Wir überlegen uns zunächst, welche Eigenschaften der Projektionsvektor $\overrightarrow{pra}$ besitzen muss:

1) $\overrightarrow{pra}$ ist parallel zu $\vec{a}$, d.h. es gilt: $\exists \lambda \in R$: $\overrightarrow{pra} = \lambda \vec{a}$

2) $\vec{b}$ - $\overrightarrow{pra}$ und $\vec{a}$ stehen senkrecht aufeinander, d.h. es ist $(\vec{b} - \overrightarrow{pra}, \vec{a}) = 0$.

Wir berechnen nun λ.
Aus den o.g. 2 Eigenschaften und den Eigenschaften des Skalarproduktes ergibt sich:

$$0 = (\vec{b} - \overrightarrow{pra}, \vec{a}) = (\vec{b}, \vec{a}) - (\overrightarrow{pra}, \vec{a}) = (\vec{b}, \vec{a}) - \lambda(\vec{a}, \vec{a}) = (\vec{b}, \vec{a}) - \lambda |\vec{a}|^2$$

bzw. kurz:

$$0 = (\vec{b}, \vec{a}) - \lambda |\vec{a}|^2$$

Demzufolge ist: $\lambda = \dfrac{(\vec{b}, \vec{a})}{|\vec{a}|^2}$

Wegen 1) ist dann der Projektionsvektor $\overrightarrow{pra}$ von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$: $\overrightarrow{pra} = \dfrac{(\vec{b}, \vec{a})}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$

Zu b)

Formel für den Projektionsvektor $\overrightarrow{pra}$ des Vektors $\vec{a}$ auf den Vektor $\vec{b}$:

$$\overrightarrow{pra} = \frac{(\vec{b},\vec{a})}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$$

Berechnung des Projektionsvektors für unser Beispiel:

$$(\vec{a},\vec{b}) = -2\cdot 6 + 4\cdot 1 = -8$$

$$|\vec{b}|^2 = 36 + 1 = 37$$

Daraus folgt:

$$\overrightarrow{pra} = -\frac{8}{37} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}297 \\ -0{,}22 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zeichnung: