

Zu Aufgabe 1

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das durch die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird!

Lösung:

Flächeninhalt = $\frac{|\vec{a} \otimes \vec{b}|}{2}$

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \begin{pmatrix} 12 + 4 \\ -(3 + 4) \\ 2 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\vec{a} \otimes \vec{b}| = \sqrt{16^2 + (-7)^2 + 10^2} = \sqrt{405}$$

$$= 20,125$$

$$\Rightarrow \text{Ergebnis: Flächeninhalt} = \frac{20,125}{2} = \underline{\underline{10,062}}$$

Zu Aufgabe 2

Berechnen Sie das Volumen des durch folgende 3 Vektoren aufgespannten Spats !

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$V = [\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 7 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -8 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot 4 \cdot (-8) + 1 \cdot 7 \cdot 1 + (-1) \cdot (-3) \cdot (2) - 1 \cdot 4 \cdot (-1) - 2 \cdot 7 \cdot (-1) - (-8) \cdot (-3) \cdot (1)$$

$$= 32 + 7 + 6 + 4 + 14 - 24$$

$$= 39$$

Zu Aufgabe 3

$$\text{Seien } \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie einen Vektor an, der senkrecht auf \vec{a} und \vec{b} steht!

b) Sei $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 4 \end{pmatrix}$ ein dritter Vektor. Wie muss λ gewählt werden, damit \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} komplanar sind?

c) Geben Sie einen weiteren Vektor \vec{d} an, der zu \vec{a} und \vec{b} komplanar, aber nicht parallel zu \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} ist!

Lösungen:**Zu a)**

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ -2 & 4 & 11 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-55 \\ -(-2+33) \\ -10+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -51 \\ -31 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Zu b)

Bedingung, damit die drei Vektoren komplanar sind: $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = 0$

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 4 \\ -2 & 4 & 11 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 4 & 1 & \lambda \\ -2 & 4 & 11 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$4 - 33\lambda - 40 + 48 - 55 + 2\lambda = 0$$

$$-31\lambda - 43 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{43}{31}$$

$$\text{Damit ist der gesuchte Vektor } \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -43/31 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Zu c) z.B.:

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}$$

HTW	MST Mathematik 1
	Lösungen zu Übungsblatt 5

Zu Aufgabe 4

Seien \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 3 Vektoren mit folgenden Eigenschaften: 1. $\vec{a} \parallel (\vec{b} \otimes \vec{c})$ und 2. die Länge von \vec{a} ist 10 und 3. \vec{b} steht senkrecht auf \vec{c} . Untersuchen Sie, ob die Vektoren $\vec{a} + 2\vec{b}$ und $\vec{a} - 3\vec{c}$ senkrecht aufeinander stehen oder nicht!

Lösung:

Es gilt wegen $\vec{a} \parallel (\vec{b} \otimes \vec{c})$ dass

1. $\vec{a} \perp \vec{b}$ (bzw. $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$) und

2. $\vec{a} \perp \vec{c}$ (bzw. $(\vec{a}, \vec{c}) = 0$)

Weiterhin ist:

3. $|\vec{a}| = 10$

4. $\vec{b} \perp \vec{c}$ (bzw. $(\vec{b}, \vec{c}) = 0$)

daraus folgt:

$$(\vec{a} + 2\vec{b}, \vec{a} - 3\vec{c}) = |\vec{a}|^2 - 3(\vec{a}, \vec{c}) + 2(\vec{a}, \vec{b}) - 6(\vec{b}, \vec{c}) = 100 \neq 0.$$

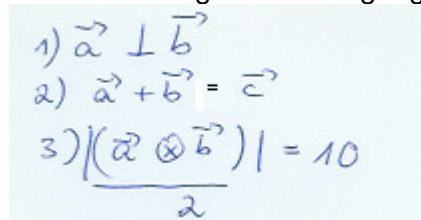
D.h., $\vec{a} + 2\vec{b}$ und $\vec{a} - 3\vec{c}$ stehen nicht senkrecht aufeinander!

Zu Aufgabe 5

Geben Sie 3 Vektoren an, die ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Flächeninhalt 10 bilden!
(Mit Begründung!)

Lösung:

Es müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:



Handwritten conditions:

- 1) $\vec{a} \perp \vec{b}$
- 2) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$
- 3) $\frac{|(\vec{a} \otimes \vec{b})|}{2} = 10$

Wir wählen nun einen der 3 Vektoren beliebig.

$$\text{Sei } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Es gilt: } \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$|\vec{a} \otimes \vec{b}| = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda = 20 \quad \text{damit } |\vec{a} \otimes \vec{b}| = 20 \text{ ist.}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ergebnis:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$