

Zu Aufgabe 1)

Zu a) Es ist mit $P=(x,y)$:

$$x = 2+6\lambda$$

$$y = -3+4\lambda$$

Wir lösen die erste Gleichung nach λ auf ($\lambda = (x-2)/6$) und setzen das Ergebnis in die 2. Gleichung ein und erhalten die Geradengleichung in Normalform:

$$y = -3 + \frac{4(x-2)}{6} = \frac{2}{3}x - \frac{13}{3}, x \in \mathbb{R}.$$

Zu b) Die Geradengleichung $y=-4x+2, x \in \mathbb{R}$ erfüllen alle Punkte $P=(x,y)$ mit:

$$x = x$$

$$y = -4x + 2$$

In Vektorschreibweise: $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$

Die Punkt-Richtungsform lautet folglich:

$$g = \{ P | P = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \}$$

Zu c)

Wir überprüfen, ob der Punkt die Geradengleichung erfüllt, d.h. ob gilt:

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}: \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}. \quad \text{Ausgeschrieben ist diese Gleichungssystem:}$$

$$\begin{aligned} -1 &= 1 + 2\lambda \\ 3 &= 2 + 6\lambda \\ 2 &= 3 + 4\lambda \end{aligned}$$

Aus der ersten Zeile folgt, dass $\lambda = -1$ sein muss. Für dieses λ ist aber die 2. und auch die 3. Zeile nicht erfüllt. D.h. Q liegt nicht auf der Geraden g .

Zu Aufgabe 2)

Gegeben seien drei Geraden:

$$g_1 = \{ P | P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \}, \quad g_2 = \{ P | P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \},$$

$$g_3 = \{ P | P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \}.$$

- a) Bestimmen Sie die Lage der drei Geraden zueinander! $g_1 ? g_2$, $g_1 ? g_3$, $g_2 ? g_3$.
 b) Falls die Geraden sich schneiden, so berechnen Sie Schnittpunkt und Schnittwinkel!
 c) Falls die Geraden parallel oder windschief sind, so berechnen Sie den Abstand!

Lösung:

Zu a) g_1 ist windschief zu g_2 , g_2 schneidet g_3 , g_1 und g_3 sind parallel.

Zu b) Schnittpunkt von g_2 und g_3 ist $S=(2,0,2)$.

Schnittwinkel α : Winkel zwischen den Richtungsvektoren:

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{-3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{14}} = \frac{-3}{\sqrt{28}} = 0,567 \Rightarrow \alpha = 124,54^\circ$$

Zu c) 1. Fall: g_1 ist windschief zu g_2 , Abstand:

$$d(g_1, g_2) = \frac{\left| \overrightarrow{[P_1 P_2, \vec{a}_1, \vec{a}_2]} \right|}{\left| \vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2 \right|}$$

$$\text{Es ist } \vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{[P_1 P_2, \vec{a}_1, \vec{a}_2]} = \overrightarrow{P_1 P_2} \cdot (\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = 8$$

$$\text{Demzufolge beträgt der Abstand: } d(g_1, g_2) = \frac{8}{\sqrt{36+4+36}} = \frac{8}{\sqrt{76}} = 0,918.$$

2. Fall: g_1 und g_3 sind parallel. Abstand: Wird in der Übung berechnet!

Zu Aufgabe 3)

Achtung: Die Lösungen zu den Aufgaben 3a) bis 3e) sind nicht eindeutig!

D.h., im folgenden sind Beispiellösungen angegeben. Andere können aber auch richtig sein.

Zu a)

Richtungsvektor \vec{a}_2 von g_2 : $\vec{a}_2 = \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. (d.h., der Richtungsvektor von g_2 ist gleich

\vec{a}_1 = Richtungsvektor von g_1). Damit sind die beiden Geraden parallel oder gleich.

Aufpunkt P_2 von g_2 : $P_2 = P_1 + \vec{v}$:

Damit die Geraden g_1 und g_2 nicht identisch sind, konstruieren wir uns einen Vektor \vec{v} , der nicht parallel zu \vec{a}_1 ist, also von der Geraden g_1 weg zeigt. Z.B. kann \vec{v} ein Vektor sein, der senkrecht auf \vec{a}_1 steht:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Damit ist der Aufpunkt } P_2 \text{ von } g_2 \text{ z.B.: } P_2 = P_1 + \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: $g_2 = \{P \mid P = P_2 + \lambda \vec{a}_2, \lambda \in R\}$

Zu b) Lösung wie unter a) nur dass wir \vec{v} senkrecht zu \vec{a}_1 zunächst mit einer Länge von 1 wählen (also normieren) und dann mal 3 nehmen:

Richtungsvektor \vec{a}_2 von g_2 : $\vec{a}_2 = \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, (damit ist g_2 parallel oder gleich g_1)

Aufpunkt P_2 von g_2 : $P_2 = P_1 + 3 \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$. (damit ist der Aufpunkt P_2 von P_1 3

Längeneinheiten auf der senkrecht zur Geraden g_1 verlaufenden Gerade mit Richtungsvektor \vec{v} entfernt).

Zu c) Richtungsvektor \vec{a}_2 von g_2 : $\vec{a}_2 = \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, **Aufpunkt P_2 von g_2 :** $P_2 = P_1$.

Zu d) Aufpunkt P_2 von g_2 : $P_2 = P_1$.

Als **Richtungsvektor** nehmen wir einen Vektor, der weder parallel zu \vec{a}_1 ist noch senkrecht auf \vec{a}_1 steht.

Z.B.: $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zu e)

Den **Aufpunkt P_2 von g_2** wählen wir analog zu b):

$$P_2 = P_1 + 4 \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad \text{mit } \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Den Richtungsvektor wählen wir so, dass er senkrecht auf \vec{a}_1 und senkrecht auf \vec{v} steht. Damit gewährleisten wir, dass sich die Geraden mit Sicherheit nicht schneiden:

$$\text{z.B. } \vec{a}_2 = \vec{a}_1 \otimes \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

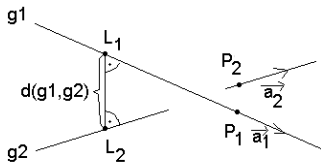
$$\text{Lösung: } g_2 = \{P \mid P = P_2 + \lambda \vec{a}_2, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Zu Aufgabe 4)

a) Entwickeln Sie eine Formel für den Abstand $d(g_1, g_2)$ zweier windschiefer Geraden

$$g_1 = \{P \mid P = P_1 + \lambda \vec{a}_1, \lambda \in \mathbb{R}\} \text{ und } g_2 = \{P \mid P = P_2 + \lambda \vec{a}_2, \lambda \in \mathbb{R}\}!$$

und geben Sie an, wie sie die beiden Lotpunkte L_1 und L_2 (siehe Skizze) berechnen!

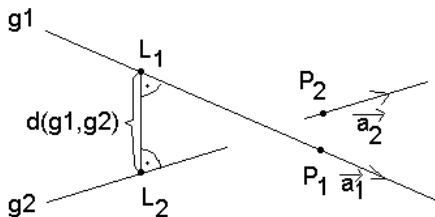


b) Zeigen Sie, dass für den Abstand $d(g_1, g_2) = \left| \overrightarrow{L_1 L_2} \right|$ zweier windschiefer Geraden gilt:

$$d(g_1, g_2) = \frac{\left| [\overrightarrow{P_1 P_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2] \right|}{\left| \vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2 \right|}$$

Lösung:

Zu a) Es gilt: $\vec{L_1 L_2} \perp \vec{a}_1$ und $\vec{L_1 L_2} \perp \vec{a}_2$ (1)
siehe Skizze :



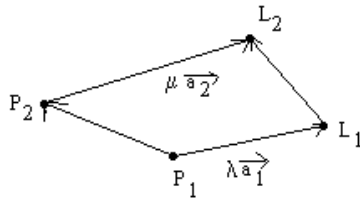
Weiterhin gilt:

$$L_1 \in g_1, \text{ d.h. } L_1 = P_1 + \lambda \vec{a}_1 \quad \text{und} \quad L_2 \in g_2, \text{ d.h. } L_2 = P_2 + \mu \vec{a}_2. \quad (2)$$

$$\text{Aus (1) folgt: } (\vec{L_1 L_2}, \vec{a}_1) = 0 \quad \text{und} \quad (\vec{L_1 L_2}, \vec{a}_2) = 0 \quad (3)$$

$$\text{Aus (2) folgt: } L_2 - L_1 = P_2 + \mu \vec{a}_2 - (P_1 + \lambda \vec{a}_1) \quad \text{bzw. wegen } L_2 - L_1 = \vec{L_1 L_2}, \quad P_2 - P_1 = \overrightarrow{P_1 P_2}$$

$$\vec{L_1 L_2} = \overrightarrow{P_1 P_2} - \lambda \vec{a}_1 + \mu \vec{a}_2 \quad (4) \text{ (siehe folgende Skizze).}$$



Setzen wir (4) in die beiden Gleichungen (3) ein, so erhalten wir unter Berücksichtigung der Eigenschaften des Skalarproduktes zwei Gleichungen in λ und μ :

$$(\vec{P_1P_2}, \vec{a}_1) + \lambda(\vec{a}_1, \vec{a}_1) - \mu(\vec{a}_2, \vec{a}_1) = 0$$

$$(\vec{P_1P_2}, \vec{a}_2) + \lambda(\vec{a}_1, \vec{a}_2) - \mu(\vec{a}_2, \vec{a}_2) = 0$$

Diese lösen wir nach λ und μ auf.

Damit erhalten wir gemäß den Gleichungen (2) die Lotpunkte L_1 und L_2 und folglich auch den Abstand :

$$d(g_1, g_2) = |\vec{L_1L_2}|.$$

Zu b) Wir können auch die in der Übungsaufgabe genannte Formel für den Abstand herleiten:

$$\text{Aus (1) : } \vec{L_1L_2} \perp \vec{a}_1 \text{ und } \vec{L_1L_2} \perp \vec{a}_2 \quad \text{folgt:} \quad \vec{L_1L_2} = \alpha (\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2) \quad (5)$$

d.h. $\vec{L_1L_2}$ ist parallel zu $(\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2)$.

Weiterhin ist nach (4):

$$\vec{L_1L_2} = \vec{P_1P_2} - \lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2 = \alpha (\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2) \quad (6)$$

Daraus folgt:

$$|\vec{L_1L_2}| = |\alpha| |\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2| \quad \text{bzw.} \quad |\alpha| = \frac{|\vec{L_1L_2}|}{|\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2|} \quad (7)$$

Multiplizieren wir die Gleichung (6) skalar mit $\vec{L_1L_2}$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \vec{L_1L_2} &= \vec{P_1P_2} - \lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2 = \alpha (\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2) \cdot |\vec{L_1L_2}| \\ \Leftrightarrow (\vec{L_1L_2}, \vec{L_1L_2}) &= (\vec{P_1P_2}, \vec{L_1L_2}) - \lambda(\vec{a}_1, \vec{L_1L_2}) + \mu(\vec{a}_2, \vec{L_1L_2}) \\ \Leftrightarrow (\vec{L_1L_2}, \vec{L_1L_2}) &= (\vec{P_1P_2}, \vec{L_1L_2}) \quad (\text{wegen (3)}) \\ \Leftrightarrow (\vec{L_1L_2}, \vec{L_1L_2}) &= (\vec{P_1P_2}, \alpha(\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2)) \quad (\text{wegen (6)}) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (\vec{L}_1\vec{L}_2, \vec{L}_1\vec{L}_2) = \alpha \cdot \overrightarrow{(P_1P_2, (\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2))}$$

$$\Leftrightarrow |(\vec{L}_1\vec{L}_2, \vec{L}_1\vec{L}_2)| = |\alpha| \cdot |\overrightarrow{(P_1P_2, (\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2))}|$$

$$\Leftrightarrow |\vec{L}_1\vec{L}_2|^2 = \frac{|\vec{L}_1\vec{L}_2|^2}{|\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2|^2} \cdot |\overrightarrow{(P_1P_2, (\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2))}|^2 \quad (\text{wegen (7)})$$

$$\Leftrightarrow |\vec{L}_1\vec{L}_2| = \frac{|\overrightarrow{[P_1P_2, \vec{a}_1, \vec{a}_2]}|}{|\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2|}$$

Zu Aufgabe 5)

Durch die Gleichung $x + 2y + 2z = 6$ sei eine Ebene im \mathbb{R}^3 gegeben.

- Geben Sie einen Vektor an, der senkrecht auf der Ebene steht!
- Geben Sie einen Vektor an, der parallel zur Ebene verläuft!
- Geben Sie die Ebene in parametrischer Form an!

Zu a) Der Normalenvektor ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dieser steht senkrecht auf der Ebene.

Zu b) Man bestimmt zwei Punkte P_1 und P_2 , die in der Ebene liegen:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Der gesuchte zur Ebene parallele Vektor ist dann:}$$

$$\vec{v} = \vec{P_1P_2} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zu c) Man bestimmt 3 Punkte P_1, P_2, P_3 , die in der Ebene liegen: $P_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Der Aufpunkt ist dann P_1 , die beiden Richtungsvektoren ergeben sich aus

$$\vec{a} = \vec{P_1P_2} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \vec{P_1P_3} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Parameterdarstellung der Ebene:

$$\mathcal{E} = \left\{ P \mid P = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zu Aufgabe 6)

Eine Ebene E sei durch den Aufpunkt $P_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

- Geben Sie die Ebene in nichtparametrischer und in Parameterform an!
- Skizzieren Sie die Lage der Ebene im karthesischen Koordinatensystem!

Lösung:

Zu a)

nichtparametrisch: $2y + z = 5$

parametrisch:

Man bestimmt 3 Punkte P_1, P_2, P_3 , die in der Ebene liegen, aber nicht auf einer Geraden::

$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. Der Aufpunkt ist dann P_1 , die beiden Richtungsvektoren

ergeben sich aus $\vec{a} = \vec{P_1 P_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \vec{P_1 P_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Parameterdarstellung der Ebene:

$$\mathcal{E} = \left\{ P \mid P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

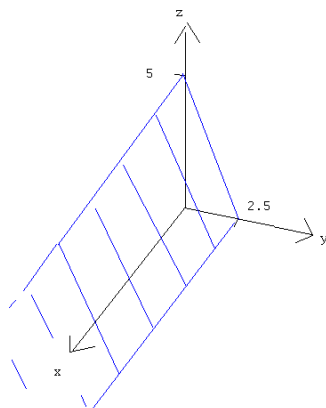
Zu b)

Wir gehen von der nichtparametrischen Gestalt der Ebene aus:

$$E = \{(x, y, z) \mid 2y + z = 5, \quad x \in \mathbb{R} \text{ beliebig}\}$$

Die Schnittpunkte mit der y- und z-Achse S_y und S_z sind: $S_y = (0, 2.5, 0)$ und $S_z = (0, 0, 5)$.

Skizze der Ebene: Die Ebene lehnt schräg an der x-z-Ebene und verläuft parallel zur x-Achse.



Zu Aufgabe 7)

Gegeben seien die Ebenen E_1, E_2 mit den Aufpunkten Q_1 bzw. Q_2 und den Normalenvektoren \vec{n}_1, \vec{n}_2 . Beschreiben Sie die jeweilige Lage der Ebenen zueinander, d.h., füllen Sie die rechte Seite folgender Tabelle aus!

Lösung:

Lage	Kriterium
E_1 schneidet E_2	$\vec{n}_1 \otimes \vec{n}_2 \neq \vec{0}$
E_1 ist parallel zu E_2	$\vec{n}_1 \otimes \vec{n}_2 = \vec{0} \wedge \overrightarrow{(P_1P_2, \vec{n}_1)} \neq 0$
E_1 ist identisch zu E_2	$\vec{n}_1 \otimes \vec{n}_2 = \vec{0} \wedge \overrightarrow{(P_1P_2, \vec{n}_1)} = 0$

Zu Aufgabe 8)

Durch die Gleichung $x + 2y + 2z = 6$ sei eine Ebene E_1 im \mathbb{R}^3 gegeben.

Eine Ebene E_2 sei durch den Aufpunkt $P_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

Welche Lage haben die beiden Ebenen zueinander?

Lösung:

Normalenvektor der Ebene E_1 ist: $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Damit ist

$$\vec{n} \otimes \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}. \text{ D.h., die Ebenen schneiden sich!}$$

Zu Aufgabe 9)

Seien $E_1 = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid P = P_1 + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ und $E_2 = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{(P_2P, \vec{n})} = 0\}$ zwei Ebenen mit den Aufpunkten P_1 und P_2 .

Es gilt $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}] = 0$ und $\overrightarrow{(P_1P_2, \vec{n})} = 0$.

Welche Lage haben die Ebenen zueinander?

- a) windschief b) schneiden sich, setzen aber nicht senkrecht aufeinander
c) stehen senkrecht aufeinander d) parallel e) identisch f) andere Lage

Lösung: c)

Zu Aufgabe 10)

Geben Sie unter Verwendung von $\vec{a}, \vec{b}, P_g, P_E$ und \vec{a}_g Kriterien an, die die Lage einer Geraden g und einer Ebene E zueinander beschreiben Dabei sind

$$g = \{P \mid P = P_g + \lambda \vec{a}_g, \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \text{und} \quad E = \{P \mid P = P_E + \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

- Wann ist $g \parallel E$?
- Wann ist $g \subseteq E$?
- Wann schneidet die Gerade g die Ebene E ?

Lösung:

Zu a) $g \parallel E \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{a}_g$ liegen in einer Ebene und $P_g \notin E$

$$\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}_g] = 0 \wedge (\overrightarrow{P_E P_g}, (\vec{a} \otimes \vec{b})) \neq 0$$

Zu b) $g \subseteq E \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{a}_g$ liegen in einer Ebene und $P_g \in E$

$$\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}_g] = 0 \wedge (\overrightarrow{P_E P_g}, (\vec{a} \otimes \vec{b})) = 0$$

Zu c) $g \times E \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{a}_g$ liegen nicht in einer Ebene

$$\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}_g] \neq 0$$

Zu Aufgabe 11)

Gegeben seien die Geraden g_1 und g_2 mit den Aufpunkten P_1 bzw. P_2 und Richtungsvektoren \vec{a}_1, \vec{a}_2 und die Ebenen E_1, E_2 mit den Aufpunkten Q_1 bzw. Q_2 und den Normalenvektoren \vec{n}_1, \vec{n}_2 . Beschreiben Sie die jeweilige Lage der Geraden und Ebenen zueinander, d.h., füllen Sie die rechte Seite folgender Tabelle aus!

Lösung:

Kriterium	Lage
$\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2 = \vec{0} \wedge \overrightarrow{P_1 P_2} \otimes \vec{a}_1 = \vec{0}$	$g_1 = g_2$
$(\vec{a}_1, \vec{n}_1) \neq 0$	$g_1 \times E_1$
$\vec{n}_1 \otimes \vec{n}_2 = \vec{0} \wedge \overrightarrow{Q_1 Q_2}, \vec{n}_1 = 0$	$E_1 = E_2$