HTW	Lösungen zu Übung 7 MST Mathematik I Vektorräume und affine Räume Prof. Dr.B.Grabowski

Zu Aufgabe 1

a) Geben Sie 2 linear unabhängige Vektoren im R^3 an!
b) Geben Sie 3 linear unabhängige Vektoren im R^3 an!
c) Geben Sie eine Basis im R^3 an!
d) Geben Sie eine Basis im R^4 an!
e) Geben Sie mindestens 2 Erzeugendensysteme des R^3 an, die keine Basis sind!
f) Geben Sie 4 linear abhängige Vektoren im R^3 an!

Lösung: Die Lösungen sind nicht eindeutig.
Mögliche Lösungen sind:

Zu a) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ **Zu b)** $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ **Zu c)** $\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$ **zu d)** $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

zu e) $\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ **und** $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

zu f) $\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

Zu Aufgabe 2

Welche der 4 Mengen von Vektoren bilden keine Basis im R^3? (Begründung!)

$$M0=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\},\quad M1=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}\right\},$$

$$M2=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix}\right\},\qquad M3=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\right\}.$$

Lösung:

M0 keine Basis, da kein EZS (dazu werden mindestens 3 Vektoren benötigt!)
M1 keine Basis, da die 3 Vektoren linear abhängig sind (Spatprodukt = 0)
M2 ist eine Basis!
M3 keine Basis, da 4 Vektoren im R^3 immer linear abhängig sind!

Zu Aufgabe 3
Untersuchen Sie, ob folgende Vektoren linear unabhängig sind:

a) $\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/2\\1\\3/2\end{pmatrix}$ c) $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix},\quad \vec{a}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \vec{a}_3=\begin{pmatrix}0\\2\\-2\\4\end{pmatrix},\quad \vec{a}_4=\begin{pmatrix}3\\6\\1\\8\end{pmatrix}$

Lösung:

Zu a) Für das Spatprodukt gilt:

$[\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}]=0$. D.h., die 3 Vektoren liegen in einer Ebene. D.h., sie sind nicht linear unabhängig!

Zu b) Für das Kreuzprodukt gilt:

$\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}-1/2\\1\\3/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\0\\2\end{pmatrix}\neq\vec{0}$. Demzufolge sind die beiden Vektoren nicht parallel, d.h., sie sind linear unabhängig!

Zu c)
Es gilt:

$$\lambda_1\vec{a}_1+\quad\lambda_2\vec{a}_2+\quad\lambda_3\vec{a}_3+\quad\lambda_4\vec{a}_4=\vec{0}$$

$$\Rightarrow\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}+\quad\lambda_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\quad\lambda_3\begin{pmatrix}0\\2\\-2\\4\end{pmatrix}+\quad\lambda_4\begin{pmatrix}3\\6\\1\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{array}{rcrcrcrcl}\lambda_1&+&\lambda_2&&&+&3\lambda_4&=&0\\2\lambda_1&&&+&2\lambda_3&+&6\lambda_4&=&0\\\lambda_1&+&\lambda_2&-&2\lambda_3&+&\lambda_4&=&0\\2\lambda_1&&&+&4\lambda_3&+&7\lambda_4&=&0\end{array}$$

Es gibt verschiedene Lösungsverfahren. Wir machen hier folgendes:
Wir diagonalisieren das Gleichungssystem (man nennt dieses Verfahren den Gausschen Algorithmus), indem wir geschickt das Vielfache einer Zeile von einer anderen abziehen.

Dabei formen wir das Gleichungssystem äquivalent um, d.h. es ändert sich die Lösungsmenge nicht bei diesen Umformungen.

1. Schritt:
Die 1. Zeile lassen wir unverändert.
Wir ziehen von der 2. Zeile 2 mal die 1. Zeile ab.
Wir ziehen von der 3. Zeile 1 mal die 1.Zeile ab
Wir ziehen von der 4. Zeile 2 mal die 1.Zeile ab

Ergebnis:

$$\begin{array}{rrrrl} \lambda_1 & +\lambda_2 & & +3\lambda_4 & =0 \\ 2\lambda_1 & & +2\lambda_3 & +6\lambda_4 & =0 \\ \lambda_1 & +\lambda_2 & -2\lambda_3 & +\lambda_4 & =0 \\ 2\lambda_1 & & +4\lambda_3 & +7\lambda_4 & =0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rrrrl} \lambda_1 & +\lambda_2 & & +3\lambda_4 & =0 \\ & -2\lambda_2 & +2\lambda_3 & & =0 \\ & & -2\lambda_3 & -2\lambda_4 & =0 \\ & -2\lambda_2 & +4\lambda_3 & +\lambda_4 & =0 \end{array}$$

2. Schritt:
Von der 4. Zeile ziehen wir die 2. Zeile ab.

$$\begin{array}{rrrrl} \lambda_1 & +\lambda_2 & & +3\lambda_4 & =0 \\ & -2\lambda_2 & +2\lambda_3 & & =0 \\ & & -2\lambda_3 & -2\lambda_4 & =0 \\ & -2\lambda_2 & +4\lambda_3 & +\lambda_4 & =0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rrrrl} \lambda_1 & +\lambda_2 & & +3\lambda_4 & =0 \\ & -2\lambda_2 & +2\lambda_3 & & =0 \\ & & -2\lambda_3 & -2\lambda_4 & =0 \\ & & 2\lambda_3 & +\lambda_4 & =0 \end{array}$$

Zur 4. Zeile addieren wir die dritte Zeile:

$$\begin{array}{rrrrl} \lambda_1 & +\lambda_2 & & +3\lambda_4 & =0 \\ & -2\lambda_2 & +2\lambda_3 & & =0 \\ & & -2\lambda_3 & -2\lambda_4 & =0 \\ & & 2\lambda_3 & +\lambda_4 & =0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rrrrl} \lambda_1 & +\lambda_2 & & +3\lambda_4 & =0 \\ & -2\lambda_2 & +2\lambda_3 & & =0 \\ & & -2\lambda_3 & -2\lambda_4 & =0 \\ & & & -\lambda_4 & =0 \end{array}$$

Dieses diagonalisierte Gleichungssystem können wir schrittweise von unten nach oben lösen, es ergibt sich als einzige Lösung:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0 .$$

Folglich gilt:

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 + \lambda_4\vec{a}_4 = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0 .$$

Demzufolge sind die 4 Vektoren unter c) linear unabhängig!

Zu Aufgabe 4

a) Geben Sie die Menge aller Vektoren im R^2 an, die parallel zur Geraden y=2x+1 verlaufen! Welche Dimension hat dieser Vektorraum?
b) Geben Sie einen konkreten affinen Raum der Dimension 1 im R^3 an!
c) Geben Sie einen konkreten affinen Raum der Dimension 2 im R^3 an!
d) Geben Sie einen konkreten affinen Raum der Dimension 3 im R^3 an!

Lösung:

Zu a) $V = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda \in R \right\}$, Dim(V) = 1.

Die Lösungen zu b),c),d) sind nicht eindeutig. Wir haben hier das Folgende:

Zu b)
Z.B. eine bestimmte Gerade im R^3: (Alle Additionen von Punkt und Vektor, Vektor und Vektor und die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar sind komponentenweise definiert)

$$A = \left\{ P \mid P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in R \right\}$$

Zu c)
Z.B. eine bestimmte Ebene im R^3: (Alle Additionen von Punkt und Vektor, Vektor und Vektor und die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar sind komponentenweise definiert)

$$A = \left\{ P \mid P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in R, \mu \in R \right\}$$

Zu d)
Die Menge aller Punkte i m R^3: (Alle Additionen von Punkt und Vektor, Vektor und Vektor und die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar sind komponentenweise definiert)

$$A = \left\{ P \mid P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in R, \mu \in R, \gamma \in R \right\}$$

Zu Aufgabe 5

Welche der folgenden Mengen ist ein Vektorraum (VR), welche ein affiner Raum (AR) und welche weder noch (Begründung)? Wenn es sich um einen VR oder AR handelt, so geben Sie die Dimension des Raumes, die Basis und ggf. den Aufpunkt an!

a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} | \quad t \in R \right\}$ b) $M = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} | \quad t \in R \right\}$ c) $M = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} | \quad t > 0 \right\}$

Lösung:

Zu a) Es ist:

$M = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} | \quad t \in R \right\} = \left\{ \vec{v} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in R \right\}$. Damit ist M ein Vektorraum der Dimension 1.

Zu b) Es ist:

$$M = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} | \quad t \in R \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in R \right\}.$$

Damit ist M ein affiner Raum der Dimension 1 (eine Gerade).

Zu c)

$$M = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} | \quad t > 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, t > 0 \right\}$$

D.h., M ist kein Vektorraum, weil der Nulvektor nicht in M ist.
M ist aber auch kein affiner Raum, weil die Menge der Vektoren, die zum Aufpunkt (3,0,0) addiert werden, kein Vektorraum ist!

Zu Aufgabe 6

3 Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sind linear unabhängig, falls gilt:

„aus $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 = \vec{0}$ folgt: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$“.

Seien $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 3 linear unabhängige Vektoren. Seien $\vec{b}_1 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$, $\vec{b}_2 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_3$, $\vec{b}_3 = \vec{a}_2 + \vec{a}_3$.

Untersuchen Sie unter Verwendung der obigen Definition der linearen Unabhängigkeit, ob $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ linear unabhängig sind!

Lösung:

$$\lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \lambda_3 \vec{b}_3 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) + \lambda_2 (2\vec{a}_1 - \vec{a}_3) + \lambda_3 (\vec{a}_2 + \vec{a}_3) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 + 2\lambda_2)\vec{a}_1 + (\lambda_1 + \lambda_3)\vec{a}_2 + (\lambda_3 - \lambda_2)\vec{a}_3 = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ Wegen der Linearen Unabhängigkeit von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ muss gelten:

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$$
$$\lambda_1 + \lambda_3 = 0$$
$$\lambda_3 - \lambda_2 = 0$$

Wir lösen das GS schritweise auf und erhalten dann $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

D.h., $\vec{b}_1, \vec{b}_2,\ \vec{b}_3$ sind linear unabhängig.

Zu Aufgabe 7
Wir betrachten Funktionen mit den rellen Zahlen als Definitionsbereich. Die Operationen + (Addition zweier Funktionen) und · (Multiplikation einer Funktion mit einem Skalar) seien wie folgt definiert:

(f+g)(x) := f(x) + g(x) für alle $x \in R$
$(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$ für alle $x \in R$

Auf der Basisi dieser beiden Operatoren betrachten wir den Vektorraum V aller Schwingungen der Frequenz 1:
$V = \{ f : x \in R \to f(x) \in R \mid \quad f(x) = \alpha \sin(x) + \beta \cos(x), \alpha \in R, \beta \in R \}$

a) Zeigen Sie, dass die beiden Funktionen $f_1(x) = \sin(x), \quad f_2(x) = \cos(x)$
linear unabhängig sind, also eine Basis im Vektorraum (V, + , ·) bilden!

a) Wie groß ist die Dimension von V?

b) Zeigen Sie: zwei Schwingungen $g1(x) = \alpha_1 \sin(x) + \beta_1 \cos(x)$ und $g2(x) = \alpha_2 \sin(x) + \beta_2 \cos(x)$, $x \in R$ sind identisch für alle $x \in R$, falls die Koeffizienten übereinstimmen, d.h. falls gilt : $\alpha_1 = \alpha_2$ und $\beta_1 = \beta_2$.

Lösung:

Zu a)
Sei $\alpha \sin(x) + \beta \cos(x) = 0$ für alle $x \in R$.
Dann gilt diese Gleichung auch speziell für x = 0 und für $x = \pi/2$:

$$\alpha \sin(0) \quad + \beta \cos(0) \quad = 0$$
$$\alpha \sin(\pi/2) + \beta \cos(\pi/2) = 0$$

$\Rightarrow$ (weil sin(0)=0, cos(0)=1, $\sin(\pi/2) = 0$, $\cos(\pi/2)=0$ folgt:
$$\beta = 0$$
$$\alpha = 0$$

Demzufolge sind die beien Funktionen sin(x) und cos(x) linear unabhängig!

Zu b)

dim(V) = 2

Zu c)

Es gilt:

$$g1(x) = g2(x) \quad \forall x \in R$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1 \sin(x) + \beta_1 \cos(x) = \alpha_2 \sin(x) + \beta_2 \cos(x) \qquad \forall x \in R$$
$$\Leftrightarrow (\alpha_1 - \alpha_2)\sin(x) + (\beta_1 - \beta_2)\cos(x) = 0 \qquad \forall x \in R$$

Weil sin(x) und cos(x) linear unabhängig sind folgt daraus:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0$$
$$\beta_1 - \beta_2 = 0$$

und folglich ist:

$$\alpha_1 = \alpha_2$$
$$\beta_1 = \beta_2$$