MST	Lösungen zu Übung 8, MST Mathematik I Matrizen, Rang Prof. Dr.B.Grabowski

Matrizenoperationen

Zu Aufgabe 1:
Bestimmen Sie die Transponierten folgender Matrizen:

$$A=\begin{pmatrix}2&4&7\\3&2&9\\1&2&3\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&4&1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}8\\4\\5\\1\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}1&7&4&2\\0&2&2&1\\0&0&4&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad E=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Welche dieser Matrizen sind symmetrisch?

Lösung:

$$A^T=\begin{pmatrix}2&3&1\\4&2&2\\7&9&3\end{pmatrix},$$

$$B^T=\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix},\qquad C^T=\begin{pmatrix}8&4&5&1\end{pmatrix},\qquad D^T=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\7&2&0&0\\4&2&4&0\\2&1&3&1\end{pmatrix},\qquad E^T=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Nur E ist symmetrisch.

Zu Aufgabe 2:
Multiplizieren Sie jeweils die Matrizen A und B miteinander, sofern dies möglich ist!
Begründen Sie ggf., warum die Matrizenmultiplikation nicht möglich ist!

a) $A=\begin{pmatrix}43\\11\\23\end{pmatrix} B=\begin{pmatrix}4&2&2\\3&1&1\end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix}2&3&2\\1&2&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&3&1\\1&4&3\end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&3&1\end{pmatrix}$ d) $A=\begin{pmatrix}2&1&1\end{pmatrix} B=\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}$ e) $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} B=\begin{pmatrix}4&0&0\\2&3&0\\1&2&1\end{pmatrix}$

Lösung:

Zu a) Produkt AB ist nicht definiert, da Spaltenanzahl von A $\neq$ Zeilenanzahl von B

aber $B\cdot A=\begin{pmatrix}172+22+46\\129+11+23\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}240\\163\end{pmatrix}$

Zu b) Produkte AB und BA sind nicht definiert, da Spaltenanzahl von A $\neq$ Zeilenanzahl von B

Zu c) $A\cdot B=\begin{pmatrix}4\cdot1 & 4\cdot3 & 4\cdot1\\ 2\cdot1 & 2\cdot3 & 2\cdot1\\ 3\cdot1 & 3\cdot3 & 3\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 12 & 4\\ 2 & 6 & 2\\ 3 & 9 & 3\end{pmatrix}$ und $B\cdot A=13$

Zu d) $A\cdot B=2\cdot4+1\cdot1+1\cdot3=12$ (und B·A = $\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 4 & 4\\ 2 & 1 & 1\\ 6 & 3 & 3\end{pmatrix}$)

Zu e) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1\cdot4+0\cdot2+0\cdot1 & 1\cdot0+0\cdot3+0\cdot2 & 1\cdot0+0\cdot0+0\cdot1\\ 0\cdot4+1\cdot2+0\cdot1 & 0\cdot0+1\cdot3+0\cdot2 & 0\cdot0+1\cdot0+0\cdot1\\ 0\cdot4+0\cdot2+1\cdot1 & 0\cdot0+0\cdot3+1\cdot2 & 0\cdot0+0\cdot0+1\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ = B

und analog: B·A=B

Zu Aufgabe 3:

Seien $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 1\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Matrix C= $(2A-3B)^T\cdot B$

Lösung:
Es ist:

$(2A-3B)^T$ = $\left(\begin{pmatrix}4 & 6 & 4\\ 2 & 4 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 9 & 3\\ 3 & 12 & 9\end{pmatrix}\right)^T=\begin{pmatrix}4 & -3 & 1\\ -1 & -8 & -7\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & -8\\ 1 & -7\end{pmatrix}$

und folglich:

C= $(2A-3B)^T\cdot B$ = $\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & -8\\ 1 & -7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 3 & 1\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 8 & 1\\ -8 & -41 & -27\\ -7 & -25 & -20\end{pmatrix}$

Zu Aufgabe 4 :

a) x= 1/16, y= 5/8

b) x = $\dfrac{\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 3\\ -4 & 2\end{vmatrix}}=\frac{1}{16}$, y= $\dfrac{\begin{vmatrix}2 & 2\\ -4 & 1\end{vmatrix}}{16}=\frac{10}{16}$

c) $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -4 & 2\end{pmatrix}\rightarrow A^{-1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/16\\ 10/16\end{pmatrix}$

Rangbestimmung

Zu Aufgabe 5:
Geben Sie den Rang der folgenden Matrizen A – E durch „Draufschauen" an !

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:
rg(A)=1 (nur eine Zeile), $rg(B) = 1$ (nur eine Spalte),
$rg(C) = 3$ (Diagonalform), $rg(D) = 4$ (Diagonalform), $rg(E) = 2$ (Diagonalform).

Zu Aufgabe 6:

Siehe Vorlesung

Zu Aufagbe 7:
Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen mittels Gausschem Algorithmus!

$$a) A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad b) B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 7 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Zu a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{Z1 mit Z3 vertauschen}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} Z2' = Z2 - 3Z1 \\ Z3' = Z3 - 2Z1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow rg(A) = 3$$

Zu b)

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 7 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$ Z1 mit Z2 vertauschen

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 7 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ Z2-4Z1 \\ Z3-2Z1 \\ Z4-7Z1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -14 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -13 & -26 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -\frac{13}{7}Z2+Z4 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -14 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{46}{7} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg(B)=4}$$

Zu Aufgabe 8:
Untersuchen Sie, ob folgende Vektoren linear unabhängig sind:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

<u>**Lösung:**</u>
Schreibt man die Vektoren als Zeilen (!), dann lautet die zu untersuchende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$ .Wir bestimmen den Rang von A mittels Gausschem Algorithmus (GA)!

<u>***GA:***</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -Z1 \\ \\ -3Z1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +Z2 \\ \\ \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -Z3 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A) = 3$$

Das heißt, die 4 Vektoren sind nicht linear unabhängig!

Zu Aufgabe 9:

Seien $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$

4 Vektoren im R^4 und V der durch diese Vektoren aufgespannte Vektorraum:

$$V = \{\vec{v} / \vec{v} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 + \lambda_4\vec{a}_4, \qquad \lambda_1 \in R, \lambda_2 \in R, \lambda_3 \in R, \lambda_4 \in R\}$$

a) Bestimmen Sie die Dimension von V!

b) Geben Sie eine Basis in V an! Begründen Sie, dass die von Ihnen angegebenen Vektoren wirklich eine Basis in V bilden!

Lösung:

Zu a) Die Dimension dim(V) von V ist gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger Vektoren aus den gegebenen 4 Vektoren.

Schreibt man die Vektoren als Zeilen(!), dann erhalten wir die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$ und es ist rg(A) = dim(V).

Wir den Rang von A, d.h. die Dimension von V mittels Gausschem Algorithmus:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ Z2 - Z1 \\ \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ Z3 + Z2' \\ Z4 + 2Z2' \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ Z4 - Z3'' \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A) = 3 \Rightarrow \dim(V) = 3$$

Zu b) Die ersten drei Vektoren:

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bilden z.B. eine mögliche Basis in V, denn wenden wir den GA auf sie an, so erhalten wir eine Diagonalform

(die ersten 3 Zeilen von $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$)