Mathematik 1 MT

Übung 4

Prof. Dr. B.Grabowski
E-Post:
grabowski@htw-saarland.de

Übung 4 (Vektorrechnung 1)

Aufgabe 1)

Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ zwei Vektoren:

a) Berechnen Sie $\vec{a} + \vec{b}$, $2\vec{a}$, $\vec{a} - \vec{b}$, und stellen Sie diese Vektoren, sowie die beiden Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ im Koordinatensystem dar!

b) Berechnen Sie: $|\vec{a}|$, $|2\vec{b}|$

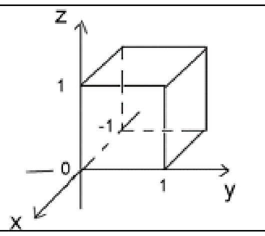
Aufgabe 2)

a) Wie lautet der Einheitsvektor, der die zum Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ entgegengesetzte Richtung hat ?

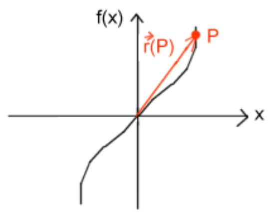
b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q, der vom Punkt P=(3;1;-5) in Richtung des Vektors $\vec{a}$ 20 Längeneinheiten entfernt ist!

Aufgabe 3)

a)
Geben Sie alle Ortsvektoren an, die zu den Eckpunkten des folgenden Einheitswürfels zeigen!



b)
Stellen Sie die Punkte, die auf der Kurve $y = f(x)=2x^3$ liegen durch Ihre Ortsvektoren dar!



c) Stellen Sie alle Punkte, die auf dem Kreis mit dem Radius 2 und dem Mittelpunkt (3,4) liegen, durch ihre Ortsvektoren dar!

Aufgabe 4)

a) Beweisen Sie folgende Behauptung: $(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}, \vec{c}) = \lambda(\vec{a}, \vec{c}) + \mu(\vec{b}, \vec{c})$.

b) Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei Vektoren, für die gilt $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ und die senkrecht aufeinander stehen und die Länge 1 besitzen. Berechnen Sie das folgende Skalarprodukt: $(\vec{a} + 2\vec{b}, 3\vec{a} - \vec{b})$!

Prof. Dr. B.Grabowski
E-Post:
grabowski@htw-saarland.de

c) Seien $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\4\\7\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\2\\-8\end{pmatrix}$ 3 Vektoren. Berechnen Sie $(\vec{a}+2\vec{b},\vec{a}-3\vec{c})$!

Aufgabe 5)

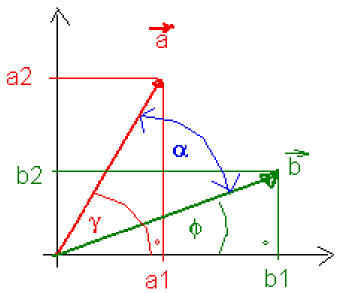
a) Zeigen Sie folgenden Satz:

Satz: Sei α der durch zwei Vektoren $\vec{a},\vec{b}$ eingseschlossene Winkel (0 ≤ α ≤ 180°).
Dann gilt: $(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\alpha)$

Hinweis: Verwenden Sie die Winkelgesetze im rechtwinkligen Dreieck, d.h. die Darstellung der Komponenten von $\vec{a},\vec{b}$ in Polarkoordinaten (siehe Skizze) und folgendes Winkelgesetz:

$$\cos(\gamma)\cos(\phi)+\sin(\gamma)\sin(\phi)=\cos(\gamma-\phi)$$

Skizze:



Man kann die Vektorkoordinaten in Polarkoordinaten darstellen:
(Gesetze im rechtwinkligen Dreieck):
z.B. gilt:

$a1=|\vec{a}|\cos(\gamma)$ und $a2=|\vec{a}|\sin(\gamma)$

b) Sei $\vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}$. Welchen Winkel schließt $\vec{a}$ mit der x- Achse ein?

c) Zeigen Sie
Satz: $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow (\vec{a},\vec{b})=0$

Mathematatik 1 MT

Übung 4

Prof. Dr. B.Grabowski
E-Post:
grabowski@htw-saarland.de

Aufgabe 6)

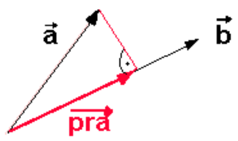
Zeigen Sie, dass die folgenden 3 Vektoren ein rechtwinkliges Dreieck bilden und berechnen Sie alle Winkel und Seitenlängen! $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7)

Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$. Geben Sie einen Vektor an, der senkrecht auf $\vec{a}$ steht, mit $\vec{b}$ einen Winkel von 30° einschließt und die Länge 2 hat !

Aufgabe 8)

a) $\overrightarrow{pra}$ bezeichnet man als Projektion des Vektors $\vec{a}$ auf den Vektor $\vec{b}$.



Leiten Sie eine Formel für $\overrightarrow{pra}$ her, die von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ abhängt!

b) Berechnen Sie die Projektion des Vektors
$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf den Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Zeichnen Sie die 2 Vektoren in ein Koordinatensystem und veranschaulichen Sie sich die Projektion.