

### Aufgabe 1

a) Gegeben sei eine Gerade im  $\mathbb{R}^2$ :  $g = \{P \mid P = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

Geben Sie die Gerade in Normalform ( $y=ax+b, x \in \mathbb{R}$ ) an!

b) Geben Sie die Gerade  $y = -4x+2, x \in \mathbb{R}$ , in Punkt-Richtungsform an!

c) Liegt der Punkt  $Q = (-1,3,2)$  auf der Geraden  $g = \{P \mid P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ ?

### Aufgabe 2

Gegeben seien drei Geraden:

$$g_1 = \{P \mid P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad g_2 = \{P \mid P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}\},$$

$$g_3 = \{P \mid P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

a) Bestimmen Sie die Lage der drei Geraden zueinander!  $g_1 \cap g_2, g_1 \cap g_3, g_2 \cap g_3$ .

b) Falls die Geraden sich schneiden, so berechnen Sie Schnittpunkt und Schnittwinkel!

(Bemerkung: Schnittwinkel = Winkel zwischen den beiden Richtungsvektoren,

Schnittpunkt: Der Punkt P, der beide Geradengleichungen erfüllt)

c) Falls die Geraden parallel oder windschief sind, so berechnen Sie den Abstand!  
(siehe Aufgabe 4b) für die Abstandsformel!)

### Aufgabe 3

Gegeben sei die Gerade  $g_1 = \{P \mid P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

Geben Sie eine Gerade  $g_2$  an, die

- parallel zu  $g_1$  aber nicht  $= g_1$  ist!
- parallel zu  $g_1$  im Abstand 3 verläuft!
- senkrecht zu  $g_1$  ist!
- $g_1$  schneidet, aber nicht senkrecht zu  $g_1$  ist!
- windschief zu  $g_1$  im Abstand 6 verläuft!

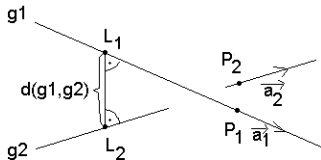
### Aufgabe 4 (Freiwillige Zusatzaufgabe)

Seien  $g_1 = \{P \mid P = P_1 + \lambda \vec{a}_1, \lambda \in \mathbb{R}\}$  und  $g_2 = \{P \mid P = P_2 + \lambda \vec{a}_2, \lambda \in \mathbb{R}\}$  zwei windschiefe Geraden.

a) Entwickeln Sie eine Formel für den Abstand  $d(g_1, g_2)$  zweier windschiefer Geraden

$$g_1 = \{P \mid P = P_1 + \lambda \vec{a}_1, \lambda \in \mathbb{R}\} \text{ und } g_2 = \{P \mid P = P_2 + \lambda \vec{a}_2, \lambda \in \mathbb{R}\}!$$

und geben Sie an, wie sie die beiden Lotpunkte  $L_1$  und  $L_2$  (siehe Skizze) berechnen!



b) Zeigen Sie, dass für den Abstand  $d(g_1, g_2) = |\vec{L_1 L_2}|$  zweier windschiefer Geraden gilt:

$$d(g_1, g_2) = \frac{|\vec{[P_1 P_2, \vec{a}_1, \vec{a}_2]}|}{|\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2|}$$

### Aufgabe 5

Durch die Gleichung  $x + 2y + 2z = 6$  sei eine Ebene im  $\mathbb{R}^3$  gegeben.

- Geben Sie einen Vektor an, der senkrecht auf der Ebene steht!
- Geben Sie einen Vektor an, der parallel zur Ebene verläuft!
- Geben Sie die Ebene in parametrischer Form an!

### Aufgabe 6

Eine Ebene  $E$  sei durch den Aufpunkt  $P_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  und den Normalenvektor  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  gegeben.

- Geben Sie die Ebene in nichtparametrischer und in Parameterform an!
- Skizzieren Sie die Lage der Ebene im kartesischen Koordinatensystem!

### Aufgabe 7

Gegeben seien die Ebenen  $E_1, E_2$  mit den Aufpunkten  $Q_1$  bzw.  $Q_2$  und den Normalenvektoren  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ . Beschreiben Sie die jeweilige Lage der Ebenen zueinander, d.h., füllen Sie die rechte Seite folgender Tabelle aus!

Lage	Kriterium
E1 schneidet E2	
E1 ist parallel zu E2	
E1 ist identisch zu E2	

### Aufgabe 8

Durch die Gleichung  $x + 2y + 2z = 6$  sei eine Ebene  $E_1$  im  $\mathbb{R}^3$  gegeben.

Eine Ebene  $E_2$  sei durch den Aufpunkt  $P_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  und den Normalenvektor  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  gegeben.

Welche Lage haben die beiden Ebenen zueinander?

### Aufgabe 9

Seien  $E_1 = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid P = P_1 + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$  und  $E_2 = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid (\vec{P}_2 P, \vec{n}) = 0\}$  zwei Ebenen mit den Aufpunkten  $P_1$  und  $P_2$ .

Es gilt  $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}] = 0$  und  $(\vec{P}_1 P_2, \vec{n}) = 0$ .

Welche Lage haben die Ebenen zueinander?

- a) windschief   b) schneiden sich, setzen aber nicht senkrecht aufeinander  
 c) stehen senkrecht aufeinander   d) parallel   e) identisch   f) andere Lage

### Aufgabe 10

Geben Sie unter Verwendung von  $\vec{a}, \vec{b}, P_g, P_E$  und  $\vec{a}$  Kriterien an, die die Lage einer Geraden  $g$  und einer Ebene  $E$  zueinander beschreiben Dabei sind

$$g = \{P \mid P = P_g + \lambda \vec{a}, \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \text{und} \quad E = \{P \mid P = P_E + \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

- a) Wann ist  $g \parallel E$  ?  
 b) Wann ist  $g \subseteq E$  ?  
 c) Wann schneidet die Gerade  $g$  die Ebene  $E$  ?

### Aufgabe 11

Gegeben seien die Geraden  $g_1$  und  $g_2$  mit den Aufpunkten  $P_1$  bzw.  $P_2$  und Richtungsvektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  und die Ebenen  $E_1, E_2$  mit den Aufpunkten  $Q_1$  bzw.  $Q_2$  und den Normalenvektoren  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ . Beschreiben Sie die jeweilige Lage der Geraden und Ebenen zueinander, d.h., füllen Sie die rechte Seite folgender Tabelle aus!

Kriterium	Lage
$\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2 = \vec{0} \wedge (\vec{P}_1 P_2, \vec{a}_1) = \vec{0}$	
$(\vec{a}_1, \vec{n}) \neq 0$	
$\vec{n}_1 \otimes \vec{n}_2 = \vec{0} \wedge (Q_1 Q_2, \vec{n}_1) = 0$	