HTW	Übung 7 MST	Mathematik I
	Vektor- und affine Räume	Prof. Dr.B.Grabowski

Aufgabe 1

- **a)** Geben Sie 2 linear unabhängige Vektoren im R^3 an!
- **b)** Geben Sie 3 linear unabhängige Vektoren im R^3 an!
- **c)** Geben Sie eine Basis im R^3 an!
- **d)** Geben Sie eine Basis im R^4 an!
- **e)** Geben Sie mindestens 2 Erzeugendensysteme des R^3 an, die keine Basis sind!
- **f)** Geben Sie 4 linear abhängige Vektoren im R^3 an!

Aufgabe 2

Welche der 4 Mengen von Vektoren bilden keine Basis im R^3? (Begründung!)

$$M0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad M1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\},$$

$$M2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad M3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 3

Untersuchen Sie, ob folgende Vektoren linear unabhängig sind:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4

- a) Geben Sie die Menge aller Vektoren im R^2 an, die parallel zur Geraden y=2x+1 verlaufen! Welche Dimension hat dieser Vektorraum?
- b) Geben Sie einen affinen Raum der Dimension 1 im R^3 an!
- c) Geben Sie einen affinen Raum der Dimension 2 im R^3 an!
- d) Geben Sie einen affinen Raum der Dimension 3 im R^3 an!

Aufgabe 5
Welche der folgenden Mengen ist ein Vektorraum (VR), welche ein affiner Raum (AR) und welche weder noch (Begründung)? Wenn es sich um einen VR oder AR handelt, so geben Sie die Dimension des Raumes, die Basis und ggf. den Aufpunkt an!

a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} \mid \quad t \in R \right\}$ b) $M = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} \mid \quad t \in R \right\}$ c) $M = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} \mid \quad t > 0 \right\}$

Aufgabe 6
3 Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sind linear unabhängig, falls gilt:

„aus $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 = \vec{0}$ folgt: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$“.

Seien $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 3 linear unabhängige Vektoren. Seien $\vec{b}_1 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$, $\vec{b}_2 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_3$, $\vec{b}_3 = \vec{a}_2 + \vec{a}_3$.

Untersuchen Sie unter Verwendung der obigen Definition der linearen Unabhängigkeit, ob $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ linear unabhängig sind!

Aufgabe 7
Wir betrachten Funktionen mit den rellen Zahlen als Definitionsbereich. Die Operationen + (Addition zweier Funktionen) und · (Multiplikation einer Funktion mit einem Skalar) seien wie folgt definiert:

(f+g)(x) := f(x) + g(x) für alle $x \in R$
(λ·f)(x) := λ·f(x) für alle $x \in R$

Auf der Grundlage dieser beiden Operatoren definieren wir den Vektorraum V aller Schwingungen der Frequenz 1:

$V = \{ f : x \in R \to f(x) \in R \mid \quad f(x) = \alpha \sin(x) + \beta \cos(x), \alpha \in R, \beta \in R \}$

a) Zeigen Sie, dass die beiden Funktionen $f_1(x) = \sin(x)$, $f_2(x) = \cos(x)$
linear unabhängig sind, also eine Basis im Vektorraum V bilden!

b) Wie groß ist die Dimension von V?

c) Zeigen Sie: zwei Schwingungen $g1(x) = \alpha_1 \sin(x) + \beta_1 \cos(x)$ und
$g2(x) = \alpha_2 \sin(x) + \beta_2 \cos(x)$, $x \in R$ sind identisch für alle $x \in R$, falls die Koeffizienten übereinstimmen, d.h. falls gilt : $\alpha_1 = \alpha_2$ und $\beta_1 = \beta_2$.