MST	Übung 8 Matrizen, Rang,	Mathematik I Prof. Dr.B.Grabowski

Matrizenoperationen

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die Transponierten folgender Matrizen:

$$A=\begin{pmatrix}2&4&7\\3&2&9\\1&2&3\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&4&1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}8\\4\\5\\1\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1&7&4&2\\0&2&2&1\\0&0&4&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Welche dieser Matrizen sind symmetrisch?

Aufgabe 2:

Multiplizieren Sie jeweils die Matrizen A und B miteinander, sofern dies möglich ist!
Begründen Sie ggf., warum die Matrizenmultiplikation nicht möglich ist!

a) $A=\begin{pmatrix}43\\11\\23\end{pmatrix} B=\begin{pmatrix}4&2&2\\3&1&1\end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix}2&3&2\\1&2&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&3&1\\1&4&3\end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&3&1\end{pmatrix}$ d) $A=\begin{pmatrix}2&1&1\end{pmatrix} B=\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}$ e) $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} B=\begin{pmatrix}4&0&0\\2&3&0\\1&2&1\end{pmatrix}$

Aufgabe 3:

Seien $A=\begin{pmatrix}2&3&2\\1&2&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&3&1\\1&4&3\end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Matrix C= $(2A-3B)^T\cdot B$

Aufgabe 4:

Berechnen Sie die Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned}2x + 3y &= 2\\ -4x + 2y &= 1\end{aligned}$$

a) Durch das Einsetzverfahren
b) Durch Verwendung von Determinanten (Cramersche Regel)
c) Durch Verwendung der inversen Koeffizientenmatrix
Machen Sie jeweils die Probe!

Rangbestimmung

Aufgabe 5:

Geben Sie den Rang der folgenden Matrizen A – E durch „Draufschauen“ an !

$$A=\begin{pmatrix}1&4&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}8\\4\\5\\1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&7&4&2\\0&2&2&1\\0&0&4&3\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Aufgabe 6:

Seien $\vec{a}, \vec{b}$ zwei linear unabhängige Vektoren ungleich dem 0-Vektor und $\lambda \neq 0$ eine reelle Zahl.

Zeigen Sie, dass gilt:

1) $\vec{a}$ und $\overrightarrow{\lambda b}$ sind linear unabhängig
2) $\vec{a}$ und $\vec{b} + \lambda\vec{a}$ sind linear unabhängig.

D.h., die lineare Unabhängigkeit ändert sich nicht, wenn man einen der Vektoren mit einem Skalar multipliziert und sie ändert sich nicht, wenn man zu einem Vektor das Vielfache des anderen dazu addiert!

Aufgabe 7:

Der Rang einer Matrix ist gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren (bzw. Spaltenvektoren).
Aufgabe 6 zeigt, dass sich der Rang einer Matrix sich nicht verändert, wenn man eine der folgenden Operationen auf die Zeilen (Spalten) der Matrix anwendet:

a) Vertauschung von 2 Zeilen (oder 2 Spalten),
b) Multiplikation einer Zeile (oder Spalte) mit einer reellen Zahl $\lambda \neq 0$!
c) Addition oder Subtraktion des Vielfachen einer Zeile (oder Spalte) zu einer anderen Zeile (oder Spalte)

Man kann nun den Rang einer beliebigen Matrix bestimmen, indem man sie durch geschickte Anwendung der Operationen a),b), c) in eine solche Diagonalgestalt bringt, dass man den Rang ablesen kann.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ Zeile2 - 3 * Zeile1 \\ Zeile3 - 2 * Zeile1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ Zeile3 - Zeile2 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Daraus folgt: rg(A) = rg(B) = 2.

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen, indem Sie sie durch geschickte Anwendung der Operationen a),b), c) in eine solche Diagonalgestalt bringen, dass Sie den Rang ablesen können.

$$a) A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad b) B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 7 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8:
Untersuchen Sie, ob folgende Vektoren linear unabhängig sind:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9:

Seien $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$

4 Vektoren im R^4 und V der durch diese Vektoren aufgespannte Vektorraum:

$$V = \{\vec{v} / \vec{v} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 + \lambda_4\vec{a}_4, \qquad \lambda_1 \in R, \lambda_2 \in R, \lambda_3 \in R, \lambda_4 \in R\}$$

a) Bestimmen Sie die Dimension von V!

b) Geben Sie eine Basis in V an! Begründen Sie, dass die von Ihnen angegebenen Vektoren wirklich eine Basis in V bilden!