MST	**Lösung zu Übung 10** **Mathematik I** Matrizen, Rang, Gausscher Algorithmus Prof. Dr.B.Grabowski

Inverse Matrix

Zu Aufgabe 1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/16 \\ 10/16 \end{pmatrix}$$

Probe: Stimmt.

Rangbestimmung

Zu Aufgabe 2

Geben Sie den Rang der folgenden Matrizen A – E durch „Draufschauen" an !

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:
rg(A)=1 (nur eine Zeile), $rg(B) = 1$ (nur eine Spalte),
$rg(C) = 3$ (Diagonalform), $rg(D) = 4$ (Diagonalform), $rg(E) = 2$ (Diagonalform).

Zu Aufgabe 3

Bestimmen Sie den Rang folgender Matrizen:

$$a) A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad b) B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 7 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Zu a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{Z1 mit Z3 vertauschen}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} Z2' = Z2 - 3Z1 \\ Z3' = Z3 - 2Z1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow rg(A) = 3$$

Zu b)

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 7 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \text{ Z1 mit Z2 vertauschen}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 7 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ Z2 - 4Z1 \\ Z3 - 2Z1 \\ Z4 - 7Z1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -14 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -13 & -26 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -\frac{13}{7} Z2 + Z4 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -14 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{46}{7} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg(B)=4}$$

Zu Aufgabe 4

Untersuchen Sie mittels GA, ob folgende 4 Vektoren linear unabhängig sind!

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Schreibt man die Vektoren als Zeilen (!), dann lautet die zu untersuchende Matrix:

MST	Lösung zu Übung 10 Mathematik I Matrizen, Rang, Gausscher Algorithmus Prof. Dr.B.Grabowski

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\1&0&1&0\\0&2&-2&4\\3&6&1&8\end{pmatrix}$$ .Wir bestimmen den Rang von A indem wir die Matrix durch geschickte

Anwendung erlaubter (d.h. den Rang nicht ändernder) Operationen diagonalisieren:

$$\text{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\1&0&1&0\\0&2&-2&4\\3&6&1&8\end{pmatrix}\begin{matrix}\\-Z1\\\\-3Z1\end{matrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&-2&0&-2\\0&2&-2&4\\0&0&-2&2\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\+Z2\\\\\end{matrix}\rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-2&0&-2\\0&0&-2&2\\0&0&-2&2\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\\\-Z3\end{matrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-2&-2&-4\\0&0&-2&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow rg(A)=3$$

Das heißt, die 4 Vektoren sind nicht linear unabhängig!

Zu Aufgabe 5

Welche Dimension besitzt der folgende Vektorraum?

$$V=\left\{\vec{v}\mid\vec{v}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\-2\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}2\\2\\0\\-2\end{pmatrix}+\lambda_4\begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\end{pmatrix},\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_4\in R\right\}$$

Begründen Sie Ihre Antwort!

<u>Lösung:</u>

Wir schreiben die 4 erzeugenden Vektoren zeilenweise in eine Matrix A. Mittels GA zur Rangbestimmung erhält man: rg(A) = 3. Demzufolge sind 3 Erzeugendenvektoren linear unabhängig und bilden damit eine Basis in V. Demzufolge ist dim(V)=3.

MST	# Lösung zu Übung 10 # Mathematik I Matrizen, Rang, Gausscher Algorithmus Prof. Dr.B.Grabowski

Zu Aufgabe 6
Lösen Sie folgendes lineare GS mittels GA!

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & 8 & 8 & -4 \\ 4 & 2 & -16 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -13 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösungen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & 8 & 8 & -4 \\ 4 & 2 & -16 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -13 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir formen das Gleichungssystem durch Anwendung des GA äquivalent in Diagonalgestalt um:

$$(A\,|\,\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 4 & 2 & -16 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \end{array}\right) \quad \text{Zeilen vertauschen:}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ 4 & 2 & -16 & 10 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ Z3+4Z1 \\ Z4+2Z1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 34 & 16 & -6 & -52 \\ 0 & 21 & 15 & -8 & -27 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ Z3-34Z2 \\ Z4-21Z2 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -18 & 130 & -18 \\ 0 & 0 & -6 & 76 & -6 \end{array}\right) \quad 3.Z \text{ und } 4.Z \text{ vertauschen und halbieren}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 38 & -3 \\ 0 & 0 & -9 & 65 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ Z4-3Z3 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 38 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -49 & 0 \end{array}\right)$$

Demzufolge erhalten wir die folgende Diagonalgestalt und die Lösungen:

$$-49x_4 = 0 \Rightarrow x_4 = 0$$
$$-3x_3 = -3 \Rightarrow x_3 = 1$$
$$x_2 + 1 = -1 \Rightarrow x_2 = -2$$
$$-x_1 - 16 + 8 = -13 \Rightarrow x_1 = 5$$

Zu Aufgabe 7

Durch folgende 4 Messpunkte (x_i,y_i) , i=1,...,4 geht genau ein Polynom 3. Grades

y= $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Xi	-1	0	1	2
Yi	0	1	0	1

Bestimmen Sie die Koeffizienten a-d dieses Polynoms, indem Sie zunächst ein Gleichungssystem aufstellen und dieses dann mittels Gausschem Algorithmus lösen!

Lösung:

Aus der Beziehung $y_i = ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d$, die für jeden der 4 Punkte (xi,yi) gelten muss, erhalten wir das Gleichungssystem:

$$A \cdot \vec{v} = \vec{y}$$

$$\text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

Wir lösen es durch Anwendung des Gausschen Algorithmus:

$$(A \mid \vec{y}) = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ Z3+Z1 \\ Z4+8Z1 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & -6 & 9 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ Z4-6Z3 \end{array},$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \text{an letzte Stelle} \\ \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem $A \cdot \vec{v} = \vec{y}$ ist folglich äquivalent zu:

$$\begin{aligned} -a + b - c + d &= 0 \\ 2b + 2d &= 0 \\ -6c - 3d &= 1 \\ d &= 1 \end{aligned}$$

Wir lösen es von unten nach oben auf und erhalten:

d = 1 c = - 2/3   b = -1   a = 2/3

Unser Polynom lautet also:

$$y=\frac{2}{3}x^3 - x^2 - \frac{2}{3}x + 1$$

.