

Homogene Gleichungssysteme, Gausscher Algorithmus

Zu Aufgabe 1

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gausschen Algorithmus die jeweilige Lösungsmenge folgender Gleichungssysteme!

Geben Sie im Falle der Lösbarkeit des GS die Lösungsmenge als Vektorraum an und geben Sie die Dimension und die Basis an!

$$\begin{array}{l}
 x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\
 -2x_1 + x_3 = 0 \\
 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\
 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 -2x_1 = -x_2 - x_3 \\
 \text{b) } x_1 - 2x_2 = -x_3 \\
 x_1 + x_2 = 2x_3
 \end{array}$$

Lösung:

Zu a)

$$\begin{array}{l}
 x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\
 -2x_1 + x_3 = 0 \\
 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\
 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0
 \end{array}
 \Leftrightarrow
 \begin{pmatrix}
 1 & 1 & -1 \\
 -2 & 0 & 1 \\
 5 & -1 & 2 \\
 2 & 6 & -3
 \end{pmatrix}
 * \vec{x} = \vec{0}$$

Mittels Gauss'schem Algorithmus diagonalisieren wir das Gleichungssystem (GS).

(Bemerkung: die rechte Seite des Gleichungssystems ist $\vec{b} = \vec{0}$. Deshalb können wir bei der Matrix $(A|\vec{b})$ \vec{b} weglassen, also nur die Koeffizientenmatrix A betrachten, da diese Spalte \vec{b} immer gleich $\vec{0}$ bleibt, egal, welche Operation des Gausschen Algorithmus wir anwenden).

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} Z2+2Z1 \\ Z3-5Z1 \\ Z2-2Z1 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 7 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} Z2+2Z1 \\ Z3+3Z2 \\ Z4-2Z2 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ Z4-Z3/4 \end{array} \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^*
 \end{aligned}$$

Das o.g. GS können wir also äquivalent durch folgende Diagonalgestalt darstellen:

$$\begin{array}{l}
 x_1 + x_2 - x_3 = 0 \quad x_3 = 0 \\
 2x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \\
 4x_3 = 0 \quad x_1 = 0
 \end{array}$$

Lösungen zu Übung 11

D.h., die Lösungsmenge des GS ist folgender Vektorraum der Dimension 0:

$$L = \{ \vec{0} \}$$

Hier ist $\text{Rg}(A^*) = 3=n$, wobei $n=3$ die Anzahl der Unbekannten ist.

Das GS hat in diesem Fall ($\text{Rg}(A) = n$) genau eine Lösung und zwar die sogenannte triviale Lösung $\vec{x} = \vec{0}$

Zu b)

$$\begin{aligned} 1.) -2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2.) x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 3.) x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} * \vec{x} = \vec{0}$$

Mittels Gaus'schem Algorithmus diagonalisieren wir das GS.

(Bemerkung: die rechte Seite des Gleichungssystems ist $\vec{b} = \vec{0}$. Deshalb können wir bei der Matrix $(A|\vec{b})$ \vec{b} weglassen, also nur die Koeffizientenmatrix A betrachten, da diese Spalte \vec{b} immer gleich $\vec{0}$ bleibt, egal, welche Operation des Gausschen Algorithmus wir anwenden).

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z1 \leftrightarrow Z3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} Z2 - Z1 \\ Z3 + 2Z1 \end{matrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z3 + Z2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^*$$

\Rightarrow es gibt unendlich viele Lösungen.

Lösung des GS:

Das GS hat die Diagonalgestalt:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -3x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Wir haben 2 Gleichungen und 2 Unbekannte, d.h., eine Unbekannte, wir wählen x_3 , können wir beliebig wählen. Anschließend lösen wir die beiden Gleichungen von unten nach oben nach x_1 und x_2 auf. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} x_3 &= \lambda \\ x_2 &= \lambda \\ x_1 &= \lambda \end{aligned}$$

D.h., die Lösungsmenge des GS ist folgender Vektorraum der Dimension 1:

$$L = \left\{ \vec{x} \mid \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}. \text{ Basisvektor} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hier ist $\text{Rg}(A^*) = 2 < n$, wobei $n=3$ die Anzahl der Unbekannten ist.

Das GS hat in diesem Falle ($\text{Rg}(A) < n$) unendlich viele Lösungen.

Die Dimension des Lösungsraumes (= Lösungsmenge) ist $d=n - \text{Rg}(A^*) = 1$ (= Anzahl der frei wählbaren Unbekannten).

Da es ein homogenes GS ($\vec{b} = \vec{0}$) ist, ist der Lösungsraum ein *Vektorraum* der Dimension $d=1$.

Bemerkung: Es gilt folgende allgemeine Regel:

Homogene lineare GS sind immer lösbar:

Fall: $\text{Rg}(A) = n \rightarrow$ Das GS hat genau eine Lösung (die triviale)

Fall: $\text{Rg}(A) < n \rightarrow$ Das GS hat unendlich viele Lösungen. Die Lösungsmenge ist ein Vektorraum der Dimension $\dim(L) = n - \text{Rg}(A)$.

Inhomogene Gleichungssysteme, Gausscher Algorithmus

Zu Aufgabe 2

Zu a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & 8 & 8 & -4 \\ 4 & 2 & -16 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -13 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir formen das Gleichungssystem durch Anwendung des GA äquivalent in Diagonalgestalt um:

$$(A | \vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 4 & 2 & -16 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \end{array} \right) \text{ Zeilen vertauschen:}$$

Lösungen zu Übung 11

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ 4 & 2 & -16 & 10 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} Z3+4Z1 \\ Z4+2Z1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 34 & 16 & -6 & -52 \\ 0 & 21 & 15 & -8 & -27 \end{array} \right) \begin{array}{l} Z3-34Z2 \\ Z4-21Z2 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -18 & 130 & -18 \\ 0 & 0 & -6 & 76 & -6 \end{array} \right) \begin{array}{l} 3.Z \text{ und } 4.Z \text{ vertauschen und halbieren} \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 38 & -3 \\ 0 & 0 & -9 & 65 & -9 \end{array} \right) \begin{array}{l} Z4-3Z3 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 38 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -49 & 0 \end{array} \right)$$

Demzufolge erhalten wir die folgende Diagonalgestalt und die Lösungen:

$$\begin{aligned} -49x_4 &= 0 \Rightarrow x_4 = 0 \\ -3x_3 &= -3 \Rightarrow x_3 = 1 \\ x_2 + 1 &= -1 \Rightarrow x_2 = -2 \\ -x_1 - 16 + 8 &= -13 \Rightarrow x_1 = 5 \end{aligned}$$

Hier ist $\text{Rg}(A^*) = \text{Rg}(A^*|\vec{b}^*) = n=4 \Rightarrow$ Das GS ist eindeutig lösbar!

Lösungsmenge: $L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Zu b)

$$\begin{aligned} 1.) x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ 2.) -2x_1 + x_3 &= -2 \\ 3.) 5x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 4.) 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 5 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix} * \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Mittels Gaus'schem Algorithmus diagonalisieren wir das GS:

Lösungen zu Übung 11

$$\begin{aligned}
 (A|\vec{b}) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & -3 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} Z2+2Z1 \\ Z3-5Z1 \\ Z4-2Z1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 7 & -6 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ Z3+3Z2 \\ Z4-2Z2 \end{array} \\
 &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ Z4-\frac{1}{4}Z3 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right) = (A^*|\vec{b}^*)
 \end{aligned}$$

Hier ist $\text{Rg}(A^*) \neq \text{Rg}(A^*|\vec{b}^*)$ bzw. $\text{Rg}(A) \neq \text{Rg}(A|\vec{b}) \Rightarrow$ Das GS ist nicht lösbar!

Lösungsmenge: $L = \Phi$

Zu c)

$$\begin{aligned}
 x_1 + 2x_2 &= 2x_3 + 7 \\
 2x_1 &= -3x_2 \\
 2x_1 + x_2 + 8x_3 + 28 &= 0
 \end{aligned}
 \Leftrightarrow
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} * \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -28 \end{pmatrix}$$

Mittels Gaus'schem Algorithmus diagonalisieren wir das GS:

$$\begin{aligned}
 (A|\vec{b}) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 7 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 8 & -28 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ Z2-2Z1 \\ Z3-2Z1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 4 & -14 \\ 0 & -3 & 12 & -42 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ Z3-3Z2 \end{array} \\
 &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 4 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = (A^*|\vec{b}^*)
 \end{aligned}$$

Es ist $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2$ und $\text{rg}(A|\vec{b}) = \text{rg}(A^*|\vec{b}^*)=2$.

Hier ist $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|\vec{b}) = 2 < 3$. D.h. das GS hat unendlich viele Lösungen. Die Lösungsmenge ist ein affiner Raum der Dimension $d=n-\text{rg}(A) = 3-2 = 1$, also eine Gerade.

Berechnung der Lösungsmenge:

Aus der diagonalisierten Matrix ergibt sich folgende Diagonalgestalt des GS:

$$\begin{aligned}
 x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 7 \\
 -x_2 + 4x_3 &= -14
 \end{aligned}$$

Lösungen zu Übung 11

Wir haben 2 Gleichungen und 2 Unbekannte, d.h., eine Unbekannte, wir wählen x_3 , können wir beliebig wählen. Anschließend lösen wir die beiden Gleichungen von unten nach oben nach x_1 und x_2 auf. Wir erhalten:

$$x_3 = \lambda.$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 14 + 4x_3 = 14 + 4\lambda \\ x_1 &= 7 - 2x_2 + 2x_3 = 7 - 28 - 4\lambda + 2\lambda = -21 - 2\lambda \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Lösungsmenge ist also:

$$L = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} -21 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufpunkt: $\begin{pmatrix} -21 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix}$, **Basisvektor:** $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zu Aufgabe 3

Für welche Werte von t bildet die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 3x_1 + tx_2 - x_3 &= \frac{14}{3} \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 &= 5 \\ 5x_1 + 8x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

eine Gerade? Wie lautet in diesem Fall die Lösung des Gleichungssystems?

Lösung:

Das Gleichungssystem ist äquivalent mit folgender Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & t & -1 & \frac{14}{3} \\ 2 & -1 & -2 & 5 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \end{array} \right) \text{Vertauschen der Spalten, in der Reihenfolge S3,S1,S2}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & t & \frac{14}{3} \\ -2 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & 8 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} Z2-2Z1 \\ Z3+Z1 \end{array}$$

Lösungen zu Übung 11

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & t & \frac{14}{3} \\ 0 & -4 & -1-2t & -\frac{13}{3} \\ 1 & 8 & 8+t & \frac{26}{3} \end{array} \right) \begin{array}{l} Z3+2Z2 \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & t & \frac{14}{3} \\ 0 & -4 & -1-2t & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 6-3t & 0 \end{array} \right)$$

Das Gleichungssystem ist nur dann lösbar, falls gilt: $rg(A) = rg(A|\vec{b})$.

Weiterhin gilt: $\dim(\text{Lösungsraum}) = n - rg(A)$, wobei n die Anzahl der Unbekannten ist, also $n=3$.

Der Lösungsraum soll eine Gerade sein, d.h., die Dimension des Lösungsraumes muss 1 sein.

Da $n = 3$ folgt aus der Bedingung $1 = 3 - rg(A)$ dass $rg(A) = rg(A|\vec{b}) = 2$ sein muss.

Deshalb muss in der obigen Dreiecksmatrix $6-3t = 0$ sein. D.h., es ist

$$6 - 3t = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

Die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Systems hat also die Dimension 1 für $t=2$.

Berechnen der Lösung des Gleichungssystems:

Einsetzen von $t = 2$ (in obige Matrix) und Berücksichtigung der obigen Vertauschung der Spalten (Die Koeffizienten in Spalte 1 gehören zu x_3 , in Spalte 2 zu x_1 und in Spalte 3 zu x_2):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & \frac{14}{3} \\ 0 & -4 & -5 & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} -x_3 + 3x_1 + 2x_2 = \frac{14}{3} \\ -4x_1 - 5x_2 = -\frac{13}{3} \end{array}$$

$$-4x_1 = -\frac{13}{3} + 5x_2 \Leftrightarrow x_1 = \frac{13}{12} - \frac{5}{4}x_2$$

$$x_3 = -\frac{14}{3} + 3\left(\frac{13}{12} - \frac{5}{4}x_2\right) + 2x_2 \Leftrightarrow x_3 = -\frac{17}{12} - \frac{7}{4}x_2$$

Die Lösungsmenge unseres inhomogenen Gleichungssystems ist also für $t=2$:

$$L = \left\{ P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in R^3 \mid P = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ -17 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5/4 \\ 1 \\ -7/4 \end{pmatrix}, \lambda \in R \right\}$$

Lösungen zu Übung 11

Zu Aufgabe 4

$$ax_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 + ax_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 + x_2 + ax_3 = 1$$

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist dieses GS

- a) eindeutig
- b) mehrdeutig
- a) nicht lösbar?
- d) Geben Sie im Falle der eindeutigen Lösbarkeit die Lösung an!

Lösung:

Das Gleichungssystem

$$ax_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 + ax_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 + x_2 + ax_3 = 1$$

ist äquivalent zur Matrix $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$, auf die wir den Gaußschen Algorithmus anwenden.

Gaußscher Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{Vertauschen} \\ \text{der Spalten} \\ \text{1 und 3}}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} Z2 - Z1 \rightarrow \\ Z3 - aZ1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ Z3 + Z2 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-a \end{pmatrix}$$

Lösbarkeitsbedingungen:

Zu a) eindeutig lösbar, falls $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|\vec{b}) = 3$, also falls $\det(A) \neq 0$. Dazu müssen alle Diagonalelemente der Matrix $\neq 0$ sein.

D.h., eindeutig lösbar $\Leftrightarrow a-1 \neq 0 \wedge -a^2-a+2 \neq 0$.

Die Lösung der Gleichung $-a^2-a+2 = 0$ ergibt: $a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow$

$$a_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

D.h., das GS ist eindeutig lösbar, falls gilt: $a \neq 1 \wedge a \neq -2$

Zu b) und c)

Wir untersuchen nun die anderen Fälle:

Fall $a=1$:

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-a \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Fall $a=-2$:

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-a \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Zu b)

Mehrdeutig lösbar, falls $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|\vec{b}) < 3$.

Für $a=1$ ist $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|\vec{b}) = 1 < 3$, d.h. das GS ist für $a = 1$ mehrdeutig lösbar!

Zu c)

Das GS ist nicht lösbar, falls gilt: $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A|\vec{b})$.

Für $a=-2$ ist $\text{rg}(A) = 2$ und $\text{rg}(A|\vec{b}) = 3$, d.h. das GS ist für $a = -2$ nicht lösbar!

Zu d)

Die Lösung des GS im Fall der eindeutigen Lösbarkeit berechnen wir mittels GA:

Wir lösen das GS $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-a \end{array} \right)$ von unten nach oben auf und erhalten:

$$x_3 = \frac{1-a}{2-a-a^2} = \frac{1-a}{(a+2)(1-a)} = \frac{1}{a+2}$$

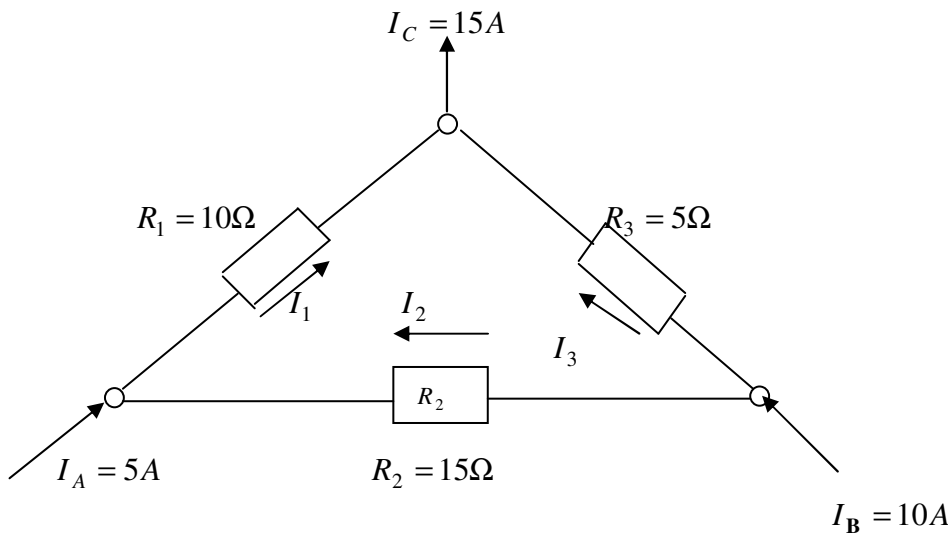
$$(a-1)x_2 + (1-a)x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{a+2}$$

$$x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{a+2}$$

Anwendungen

Zu Aufgabe 5

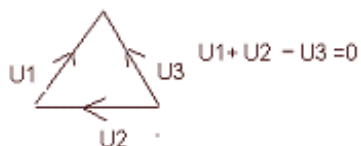
Berechnen Sie die Teilströme I_1, I_2, I_3 in folgender Masche:



Hinweis:

Verwenden Sie die Kirchhoff'schen Gesetze (Maschenregel und Knotenregel) und stellen Sie zunächst alle in dieser Masche geltenden Gleichungen für I_1, I_2, I_3 auf! Lösen Sie anschließend das GS mit dem Gaußschen Algorithmus!

Maschenregel: Die Summe der Spannungen in einer Masche ist gleich 0 (Beachten Sie, dass $U=IR$ ist und beachten Sie die Richtung des Spannungsabfalls!)



Knotenregel: Die Summe der in einen Knoten hineinfließenden Ströme ist gleich der Summe der aus dem Knoten herausfließenden Ströme.

Lösung:

Wir erhalten aus der Skizze folgendes Gleichungssystem:

- (1) $U_1 + U_2 - U_3 = 0$ *Maschenregel*
- (2) $I_2 + I_A = I_1$ *Knotenregel*
- (3) $I_B = I_2 + I_3$ *""*
- (4) $I_1 + I_3 = I_C$ *""*
- (5) $U_i = RI_i$ *Ohmsches Gesetz*

Setzen wir (5) in (1) ein und berücksichtigen wir die in der Skizze gegebenen Werte für Ströme und Widerstände, so erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

Lösungen zu Übung 11

$$\begin{array}{l}
 (1') 10I_1 + 15I_2 - 5I_3 = 0 \\
 (2') I_1 - I_2 = 5 \\
 (3') I_2 + I_3 = 10 \\
 (4') I_1 + I_3 = 15
 \end{array}
 \Leftrightarrow
 \begin{pmatrix}
 10 & 15 & -5 \\
 1 & -1 & 0 \\
 0 & 1 & 1 \\
 1 & 0 & 1
 \end{pmatrix}
 \cdot \vec{I} =
 \begin{pmatrix}
 0 \\
 5 \\
 10 \\
 15
 \end{pmatrix}$$

Mittels Gaus'schem Algorithmus diagonalisieren wir das GS:

$$\begin{aligned}
 (A|\vec{b}) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 15 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 1 & 15 \end{array} \right) \begin{array}{l} Z1 \leftrightarrow Z2 \\ \\ \\ Z4 - Z1 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 10 & 15 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 1 & 15 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ Z2 - 10Z1 \\ \\ Z4 - Z1 \end{array} \\
 &\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 25 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ Z3 \leftrightarrow Z2 \\ \\ Z4 - Z2 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 25 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ Z3 - 25Z2 \\ Z4 - Z2 \end{array} \\
 &\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -30 & -250 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Wir erhalten also folgendes zu (1') bis (4') äquivalentes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcl}
 I_1 - I_2 & = & 5 \\
 I_2 + I_3 & = & 10 \\
 -30I_3 & = & -250
 \end{array}$$

Wir lösen es von unten nach oben auf und erhalten:

$$I_3 = 25/3 = 8,333 \text{ A}$$

$$I_2 = 5/3 = 1,67 \text{ A}$$

$$I_1 = 20/3 = 6,67 \text{ A}$$

Zu Aufgabe 6

Durch folgende 4 Messpunkte (x_i, y_i) , $i=1, \dots, 4$ geht genau ein Polynom 3. Grades

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

x_i	-1	0	1	2
y_i	0	1	0	1

Bestimmen Sie die Koeffizienten a-d dieses Polynoms, indem Sie zunächst ein Gleichungssystem aufstellen und dieses dann mittels Gausschem Algorithmus oder der Cramerschen Regel lösen!

Lösungen zu Übung 11

Lösung:

Aus der Beziehung $y_i = ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d$, die für jeden der 4 Punkte (x_i, y_i) gelten muss, erhalten wir das Gleichungssystem:

$$A \cdot \vec{v} = \vec{y}$$

$$\text{mit } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

Wir lösen es durch Anwendung des Gausschen Algorithmus:

$$\begin{aligned} (A | \vec{y}) &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} Z_3 + Z_1 \\ Z_4 + 8Z_1 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 12 & -6 & 9 & | & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ Z_4 - 6Z_3 \end{array} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & | & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \text{an letzte Stelle} \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem $A \cdot \vec{v} = \vec{y}$ ist folglich äquivalent zu:

$$\begin{aligned} -a + b - c + d &= 0 \\ 2b + 2d &= 0 \\ -6c - 3d &= 1 \\ d &= 1 \end{aligned}$$

Wir lösen es von unten nach oben auf und erhalten:

$$d = 1 \quad c = -2/3 \quad b = -1 \quad a = 2/3$$

Unser Polynom lautet also:

$$y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - \frac{2}{3}x + 1.$$