MST Lösungen zu Übung 12 Mathematik 1

Prof.Dr.B.Grabowski e-mail: grabowski@htw-saarland.de Tel.: 5867-424

Determinanten

Zu Aufgabe 1:

Berechnen Sie folgende Determinanten:

$$a)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} \qquad b)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad c)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Lösung:

Als Determinante der Matrix A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ bezeichnet man die Zahl:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \ .$$

Zu a) 1·(-7) - 3·2 = -13 **Zu b)** 0·3 - 2·(-1) = 2 **Zu c)** 1·1 - 0·0 = 1

Zu Aufgabe 2:

Die in Aufgabe 2 angegebenen Formeln für x_1 und x_2 heisst **Cramersche Regel**!
Lösen Sie folgendes Gleichungssystem mit Hilfe der Cramerschen Regel:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 &= 12 \\ -x_1 + 8x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Überprüfen Sie Ihre Lösung, indem Sie die Probe machen!

Lösung:

Es ist: $D := \det(A) = 3 \cdot 8 - (-4)(-1) = 20 \neq 0 \Rightarrow in\,\mathrm{hom}\,ogenes\ System$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 12 \cdot 8 - (-4)2 = 104$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 12(-1) = 18$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{52}{10} = 5{,}2$$
$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{9}{10} = 0{,}9$$

Probe:
3·5,2 - 4·0,9 = 15,6 – 3,6 = 12
-5,2 + 8·0,9 = - 5,2 + 7,2 = 2

Zu Aufgabe 3:

Bestimmen Sie den Wert der Determinanten folgender Matrizen:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Zu a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot(-1) + 2\cdot 1\cdot 0 + 4\cdot 1\cdot 3 - 3\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 4\cdot(-1) = 14$$

Zu b)

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 3 + 2\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 0\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 1 = -1$$

Zu Aufgabe 4:

Die 3 Messpunkte erfüllen die Gleichungen yi = $ax_i^2 + bx_i + c$ und damit für i=1,2,3 folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} a - b + c &= 2 \\ a + b + c &= 1 \\ 4a + 2b + c &= 2 \end{aligned}$$ bzw. in Matrizenschreibweise: $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

In Anwendung der Cramerschen Regel und der Sarrus'schen Regel zur Spatprodukt- bzw. Determinantenberechnung erhalten wir:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2+2-2-(2+4-1)}{1+2-4-(4+2-1)} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1+2+8-(4+2+2)}{-6} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2+4-4-(8+2-2)}{-6} = \frac{-6}{-6} = 1$$

Das Polynom lautet folglich: y = $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$

Zu Aufgabe 5:

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Lösung:

Wir entwickeln nach der 1. Zeile:

$$D= (-1)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-2)\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & -6 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 4\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 1\cdot 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\cdot 4\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ 2\cdot 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} + 2\cdot 4\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

= 34 + 4· 0 + 2 + 4·0
+ 2· 8 -8· 0

= 52

Zu Aufgabe 6:

Lösung:

Zu a)

Wir entwickeln nach der 3. Spalte:

$$\det(A) = 1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Diese können wir jetzt z.B. nach der 1. Zeile entwickeln:

$$\det(A) = 1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot(-1)^{2+3}\cdot\left((-1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & -6 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

= - (-34 – 2 – 2·8) = 52

Zu b)

Nach Laplace'schem Entwicklungssatz würden wir diese Determinante nach der 1. Spalte entwickeln:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

dann würden wir wiederum nach der 1. Spalte entwickeln, u.s.w, u.s.f und wir erhalten:

det(A)= $a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{nn}$

Zu c)

Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist gleich dem Produkt ihrer Diagonalelemente:
det(A)= (-1)*13*2*(-3)*1 = 78

Zu Aufgabe 7:

Bestimmen Sie die Lösung x_3 des folgenden linearen Gleichungssystems mittels Cramerscher Regel:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_2 + 3x_3 \quad &= -1 \\ x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 \quad + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Lösung:
Es ist nach CR:

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}$$

Wir entwickeln die Determinante im Zähler nach der 3. Zeile und erhalten:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+4}(-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(2+0-1-(2-2+0)) = 2$$

Wir entwickeln die Determinante im Nenner z. B. nach der 1. Spalte und erhalten:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1}1\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+1}1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (2+0-12-(0+0+0)) - (-6+2+0-(0+0-4)) \\ &= -10 \qquad\qquad\qquad\qquad +0 \\ &= -10 \end{aligned}$$

Demzufolge ist

$x_3 = 2/(-10) = -1/5$