HTW	**Mathematik 1 Lösungen zu Übung2**
	MST

Beweisprinzipien

Zu Aufgabe 1

Zu a)
Sei $m \in N$.
Vor.: m sei ungerade
Beh: m^2 ist ungerade

Beweis: (direkt)
Sei m ungerade $\rightarrow$m ist nicht durch 2 teilbar $\rightarrow \exists k \in N: m=2k+1$
$\rightarrow m^2=(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2+2k) + 1 = 2n + 1$ mit $n=2k^2+2k$.
$\rightarrow m^2$ ist nicht durch 2 teilbar $\rightarrow m^2$ ist ungerade!
qed.

Zu b)
Vor.: Sei m eine natürliche Zahl.
Beh.: Wenn m durch 3 teilbar, so ist auch m^2 durch 3 teilbar.

Bew.: (direkt)
Sei m durch 3 teilbar $\rightarrow \exists k \in N: m=3k$
$\rightarrow m^2=(3k)^2 = 9k = 3(3k^2) = 3k^*$ mit $k^*=3k^2 \in N$.
$\rightarrow m^2$ ist durch 3 teilbar.
qed.

Zu c)
Vor.: Sei m eine natürliche Zahl.
Beh.: Wenn m^2 durch 3 teilbar, so ist auch m durch 3 teilbar.

Bew.: indirekt, wir zeigen, dass gilt:
Wenn m nicht durch 3 teilbar, so ist auch m^2 nicht durch 3 teilbar

Bew.: Sei m nicht durch 3 teilbar $\rightarrow \exists k \in N$: $m=3k+1$ oder $m = 3k+2$.
$\rightarrow m^2=(3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2+2k) + 1 = 3k^* + 1$ mit $k^*=3k^2+2k$ oder
$m^2=(3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2+6k+1) + 1 = 3k^* + 1$ mit $k^*=3k^2+6k+1$.
D.h., bei Division von m^2 bleibt stets der Rest 1.
$\rightarrow m^2$ ist nicht durch 3 teilbar!
qed.

Zu d)
Vor: $a > b$, $a,b \in N$
Beh: $\frac{a \cdot b}{a+b}$ ist unkürzbar $\Rightarrow \frac{a}{b}$ ist unkürzbar

Beweis: (indirekt)

Sei $\frac{a}{b}$ kürzbar →∃k,p,q∈N: a = kp und b = kq → $\frac{a\cdot b}{a+b} = \frac{k\cdot k\cdot p\cdot q}{k(p+q)}$ ist ebenfalls (durch k) kürzbar.

qed.

zu e)

Beh: $\forall n \in \mathrm{N}$: $\frac{n^2+1}{n+1} \geq 1$

Beweis: (direkt)

Es gilt: $\frac{n^2+1}{n+1} > 1 \Leftrightarrow n^2+1 \geq n+1 \Leftrightarrow n^2 \geq n \Leftrightarrow n \geq 1$.

Da für alle natürlichen Zahlen n ≥1 gilt, ist die Behauptung des Satzes (aufgrund ihrer Äquivalenz zur wahren Aussage n ≥1) wahr.

qed.

zu f)

Beh.: $\forall n \in N : \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Beweis: (Vollst. Induktion)

IA: n=1: LS=1, RS=1 --> LS=RS

q.e.d

IS: Vor.: $\forall n \in N : \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Beh.: $\forall n \in N : \sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

Bew.:

$$LS_{Beh} = \sum_{i=1}^{n+1} i^2 \underset{zerlegen}{=} \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2$$

$$\underset{RS\ der\ Vor.}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$\underset{umformen}{=} \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)[2n^2+7n+6]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = RS_{Beh.}$$

q.e.d

Zu g) Beh.: $\forall n \in N, n \geq 7 : 3^n \leq n!$

Beweis: (Vollst. Induktion)
IA: n=7: LS=3^7=2187, RS=7!=5040 --> LS ≤ RS
q.e.d

IS: Vor.: $3^n \leq n! \quad \textit{für} \quad \textit{ein} \quad n \geq 7$

Beh.: $3^{n+1} \leq (n+1)!$

Bew.:

$$LS_{Beh} \quad = \quad 3^{n+1} = 3^n \cdot 3 \underset{Vor.}{\leq} n! \cdot 3 \underset{n \geq 7}{\leq} n! \cdot (n+1) = (n+1)!$$

q.e.d

Mengenlehre

Zu Aufgabe 2

a) $E = \{n \in N \mid \exists k \in N : n = 3k\}$

b) $Q = \{\frac{n}{m} \mid n \in Z \wedge m \in N\}$

Zu Aufgabe 3

a)

$B \cup C = \{7,14,18,21,24,28,35\}$

$B \cup \overline{C}_D = \{7,14,21,28,35\} \cup \{9,12,15,27,30\} = \{7,9,12,14,15,21,27,28,30,35\}$

$B \setminus C = \{7,14,28,35\}$

A∪D=ϕ={} (leere Menge), B∪C={21}

b) Die Potenzmenge -wir schreiben $\wp(A)$ - einer Menge A ist die Menge aller Teilmengen von A: $\wp(A) = \{M \mid M \subseteq A\}$.

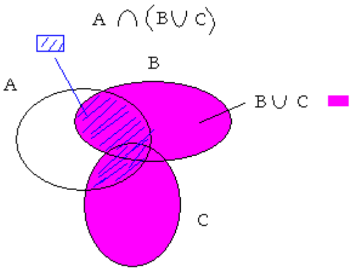
Demzufolge ist: $\wp(C) = \{\emptyset, \{18\}, \{21\}, \{24\}, \{18,21\}\{18,24\}\{21,24\}\{18,21,24\}\}$

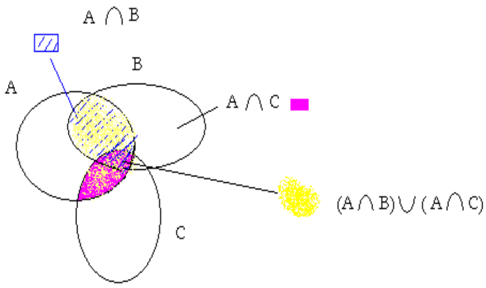
c) $|D| = 8$

HTW	Mathematik 1 Lösungen zu Übung2
	MST

Zu Aufgabe 4

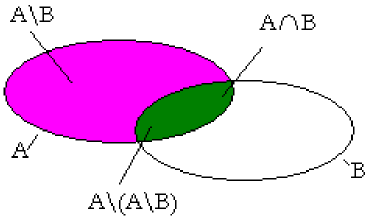
a)





$$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow$$
$$(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C) \Leftrightarrow$$
$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

b)



Zu Aufgabe 5

a) zu 6 , b) zu 5 , c) zu 2, d) zu 3), e) zu 1, f) zu 4 .

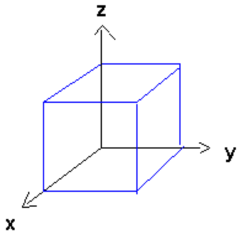
Zu Aufgabe 6

Zu a) $A = (A\cap B)\cup A\backslash B=\{1,2,4,6\}$

Zu b) $(A\cup C)\cap B = (A\cap B)\cup(C\cap B)=\{2,4,6\} \cup\{2,5\}=\{2,4,5,6\}$.

Zu Aufgabe 7

a)



3-dimensionale Würfel mit Kantenlänge 1.

b) M=(1,4) = { x∈R|1<x<4}. (offenes Intervall von 1 bis 4).

c)

$$
\begin{aligned}
A\times B = \{&(2,7),(4,7),(8,7)(16,7)(32,7)\\
&(2,14,)(4,14),(8,14),(16,14)(32,14)\\
&(2,21),(4,21),(8,21)(16,21)(32,21)\\
&(2,28),(4,28),(8,28),(16,28),(32,28),\\
&(2,35),(4,35),(8,35),(16,35),(32,35)\}\\
B\times A = \{&(7,2),(7,4),(7,8),(7,16),(7,32),\\
&(14,2),(14,4),(14,8),(14,16),(14,32),\\
&\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\\
&(35,2),(35,4),(35,8),(35,16),(35,32)\}
\end{aligned}
$$

Zu Aufgabe 8

$M = \{x\in Z \mid \exists z\in Z : x = 3z\}$

Es ist $|M| = |N|$ **.**

Begründung: Es ist $|M| = |Z|$ (weil jedes z∈Z eineindeutig durch die Zuordnung x=3z auf x∈M abbildbar ist). Weiterhin haben wir in der Vorlesung gezeigt: |Z|=|N|. Daraus folgt: |M|=|N|.