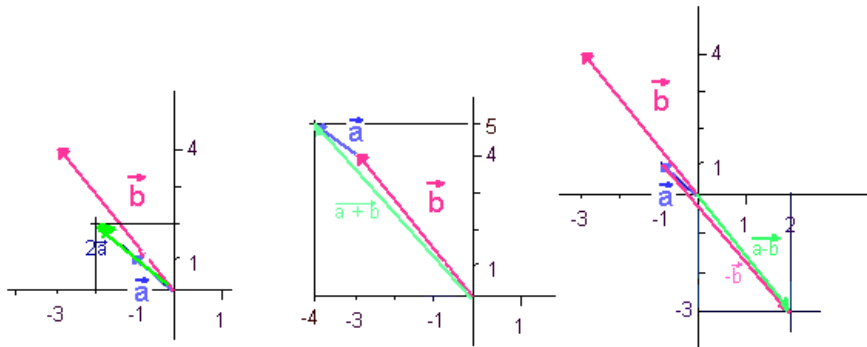


Zu Aufgabe 1

Zu a) Komponentenweise Addition, Subtraktion und Multiplikation mit Skalar:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 + (-3) \\ 1 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad 2\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 - (-3) \\ 1 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$



Zu b)

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2} = \sqrt{17}, \quad |2\vec{b}| = 2|\vec{b}| = 2\sqrt{(-3)^2 + 1^2} = 2\sqrt{10} = 2\sqrt{10}$$

Zu Aufgabe 2

$$\text{a) } \vec{e}_a = -\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

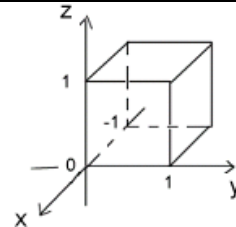
$$\text{b) } Q = P + 20\vec{e}_a = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \frac{20}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + \frac{20}{\sqrt{17}} \\ 1 - \frac{80}{\sqrt{17}} \\ -5 + \frac{60}{\sqrt{17}} \end{pmatrix}$$

Zu Aufgabe 3

a) Geben Sie alle Ortsvektoren an, die zu den Eckpunkten des folgenden Einheitswürfels zeigen!

Lösung:

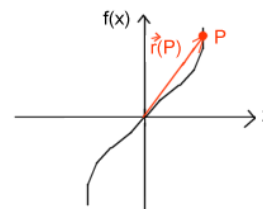
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$



b) Stellen Sie die Punkte, die auf der Kurve $y = f(x) = 2x^3$ liegen durch Ihre Ortsvektoren dar!

Lösung:

$$P = \begin{pmatrix} x \\ 2x^3 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$$



c) Stellen Sie alle Punkte, die auf dem Kreis mit dem Radius 2 und dem Mittelpunkt (3,4) liegen, durch ihre Ortsvektoren dar!

Lösung:

$$P = \begin{pmatrix} 3 + 2 \cos(\alpha) \\ 4 + 2 \sin(\alpha) \end{pmatrix}, \alpha \in [0, 2\pi].$$

oder alternativ:

$$P = \begin{pmatrix} x-3 \\ 4 + \sqrt{4 - (x-3)^2} \end{pmatrix} \text{ oder } P = \begin{pmatrix} x-3 \\ 4 - \sqrt{4 - (x-3)^2} \end{pmatrix}, -2 \leq x-3 \leq 2.$$

HTW	Lösungen zu Mathe I	Übung 4
	MST1	
	grabowski@htw-saarland.de	

Zu Aufgabe 4

Zu a)

Es gilt für beliebige Vektoren $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2$. (Skalarprodukt = Länge zum Quadrat).

Weiterhin gilt $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

(Ihr Skalarprodukt ist 0).

Demzufolge erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 (\vec{a} + 2\vec{b}, 3\vec{a} - \vec{b}) &= (\vec{a}, 3\vec{a}) + (2\vec{b}, 3\vec{a}) + (\vec{a}, -\vec{b}) + (2\vec{b}, -\vec{b}) = 3(\vec{a}, \vec{a}) + 6(\vec{b}, \vec{a}) - (\vec{a}, \vec{b}) - 2(\vec{b}, \vec{b}) \\
 &= 3|\vec{a}|^2 - 2|\vec{b}|^2 = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1^2 = 1
 \end{aligned}$$

Zu b)

Hier gibt es zwei Möglichkeiten.

1. Variante: man zerlegt das Skalarprodukt:

$(\vec{a} + 2\vec{b}, \vec{a} - 3\vec{c}) = |\vec{a}|^2 - 3(\vec{a}, \vec{c}) + 2(\vec{b}, \vec{a}) - 6(\vec{b}, \vec{c})$ und berechnet die rechte Seite.

2. Variante: man rechnet erst $\vec{a} + 2\vec{b}$ und $\vec{a} - 3\vec{c}$ aus und dann das Skalarprodukt der Ergebnisvektoren:

Es ist: $\vec{a} + 2\vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix}$ und $\vec{a} - 3\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 23 \end{pmatrix}$ und folglich ist:

$$(\vec{a} + 2\vec{b}, \vec{a} - 3\vec{c}) = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 23 \end{pmatrix} = (-7)(-4) + 9(-5) + 13 \cdot 23 = 282$$

Zu Aufgabe 5

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$. Welchen Winkel schließt \vec{a} mit der x-Achse ein?

Lösung: Sei α der Winkel zwischen \vec{a} und x-Achse, $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ der Einheitsvektor auf der x-Achse

und a_x die erste Komponente von \vec{a} . Dann gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{(\vec{a}, \vec{e}_x)}{|\vec{a}| \cdot |\vec{e}_x|} = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{-2}{\sqrt{20}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -0,4472 \Rightarrow \alpha = 63,43^\circ$$

HTW	Lösungen zu Mathe I	Übung 4
	MST1	
	grabowski@htw-saarland.de	

Zu Aufgabe 6

Damit die drei Vektoren überhaupt ein Dreieck bilden, muss die Summe von zwei der Vektoren den dritten ergeben. Dies gilt für : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

Wenn es sich dabei um ein rechtwinkliges Dreieck handeln soll, muss der

Satz des Pythagoras gelten : $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$

$$(1+16+4) + (4+4+9) = (1+36+1) \text{ stimmt!}$$

Winkel :

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ \quad \text{denn} \quad (\vec{a}, \vec{b}) = 0.$$

Weiterhin ist (mit $\arccos = \cos^{-1}$)

$$\angle(\vec{a}, \vec{c}) = \arccos\left(\frac{|\vec{a}|}{|\vec{c}|}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{38}}\right) \approx 41,9^\circ$$

$$\angle(\vec{b}, \vec{c}) = \arccos\left(\frac{|\vec{b}|}{|\vec{c}|}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{38}}\right) \approx 48,1^\circ$$

Flächeninhalt :

$$F = \text{Grundlinie} * \text{Höhe} / 2$$

$$F = \frac{|\vec{a}||\vec{b}|}{2} = \frac{\sqrt{21} * \sqrt{17}}{2} \approx 9,44$$

Seitenlängen:

$$|\vec{a}| = \sqrt{21} \approx 4,58$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{17} \approx 4,123$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{38} \approx 6,16$$

Zu Aufgabe 7

Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$. Geben Sie einen Vektor an, der senkrecht auf \vec{a} steht, mit \vec{b}

einen Winkel von 30° einschließt und die Länge 2 hat !

Lösung:

Für den anzugebenden Vektor \vec{c} muss gelten:

1) $(\vec{a}, \vec{c}) = 0$

2) $|\vec{c}| = 2$

HTW	Lösungen zu Mathe I	Übung 4
	MST1	
	grabowski@htw-saarland.de	

$$3) \cos(30^\circ) = \frac{(\vec{c}, \vec{b})}{|\vec{c}| |\vec{b}|}$$

$$\text{Aus 3) folgt: } 4) \cos(30^\circ) = 0,866 = \frac{(\vec{c}, \vec{b})}{2\sqrt{74}}$$

Aus 1), 2) und 4) ergeben sich folgende Gleichungen für die Koordinaten von \vec{c} :

$$(1) -c_1 + c_2 - c_3 = 0$$

$$(2) c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 4$$

$$(3) -c_1 + 4c_2 + 7c_3 = 14,9$$

Wir wählen jetzt die Koordinaten so, dass diese 3 Gleichungen erfüllt sind.

$$\text{Aus (1) folgt: (1')} c_1 = c_2 - c_3$$

$$\text{Aus (3) und (1) folgt: (3')} c_2 = (14,9 - 8c_3)/3$$

$$\text{Setzen wir das in (1) ein, so ergibt sich: (1'')} c_1 = (14,9 - 11c_3)/3$$

Aus (2), (3') und (1'') ergibt sich:

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (14,9 - 11c_3)^2 + (14,9 - 8c_3)^2 + 9c_3^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow 194c_3^2 - 566,2c_3 + 408,02 = 0$$

$$\Leftrightarrow c_3^2 - 2,919c_3 + 2,104 = 0$$

$$\Leftrightarrow c_{3,1/2} = 1,4595 \pm \sqrt{0,026} = \begin{cases} 1,621 \\ 1,298 \end{cases}$$

Die Lösung für c_1, c_2, c_3 ist nicht eindeutig.

Nehmen wir z.B. den ersten Wert für c_3 , so erhalten wir:

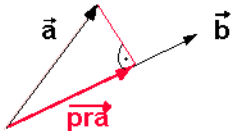
$c_1 = -0,977, c_2 = 0,644, c_3 = 1,621$ bzw. als Lösungsvektor:

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} -0,977 \\ 0,644 \\ 1,621 \end{pmatrix}$$

HTW	Lösungen zu Mathe I	Übung 4
	MST1	
	grabowski@htw-saarland.de	

Zu Aufgabe 8

a) \vec{pra} bezeichnet man als Projektion des Vektors \vec{a} auf den Vektor \vec{b} .



Leiten Sie eine Formel für \vec{pra} her, die von \vec{a} und \vec{b} abhängt!

b) Berechnen Sie die Projektion des Vektors

$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf den Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Zeichnen Sie die 2 Vektoren in ein Koordinatensystem und veranschaulichen Sie sich die Projektion.

Zu a)

Wir überlegen uns zunächst, welche Eigenschaften der Projektionsvektor \vec{pra} besitzen muss:

- 1) \vec{pra} ist parallel zu \vec{a} , d.h. es gilt: $\exists \lambda \in \mathbb{R}: \vec{pra} = \lambda \vec{a}$
- 2) $\vec{b} - \vec{pra}$ und \vec{a} stehen senkrecht aufeinander, d.h. es ist $(\vec{b} - \vec{pra}, \vec{a}) = 0$.

Wir berechnen nun λ .

Aus den o.g. 2 Eigenschaften und den Eigenschaften des Skalarproduktes ergibt sich:

$$0 = (\vec{b} - \vec{pra}, \vec{a}) = (\vec{b}, \vec{a}) - (\vec{pra}, \vec{a}) = (\vec{b}, \vec{a}) - \lambda(\vec{a}, \vec{a}) = (\vec{b}, \vec{a}) - \lambda |\vec{a}|^2$$

bzw. kurz:

$$0 = (\vec{b}, \vec{a}) - \lambda |\vec{a}|^2$$

Demzufolge ist: $\lambda = \frac{(\vec{b}, \vec{a})}{|\vec{a}|^2}$

Wegen 1) ist dann der Projektionsvektor \vec{pra} von \vec{b} auf \vec{a} : $\vec{pra} = \frac{(\vec{b}, \vec{a})}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$

Zu b)

Formel für den Projektionsvektor \vec{pra} des Vektors \vec{a} auf den Vektor \vec{b} :

$$\vec{pra} = \frac{(\vec{b}, \vec{a})}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$$

Berechnung des Projektionsvektors für unser Beispiel:

$$\begin{aligned}(\vec{a}, \vec{b}) &= -2 \cdot 6 + 4 \cdot 1 = -8 \\ |\vec{b}|^2 &= 36 + 1 = 37\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\vec{pra} = -\frac{8}{37} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,297 \\ -0,22 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zeichnung:

