HTW	**MST Mathematik 1**
	Lösungen zu Übungsblatt 5

Vektorrechnung

Zu Aufgabe 1

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das durch die Vektoren

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix},\qquad \vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix},\qquad \vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\6\\1\end{pmatrix}$$

aufgespannt wird!

Lösung:

$$\text{Flächeninhalt} = \frac{|\vec{a}\otimes\vec{b}|}{2}$$

$$\vec{a}\otimes\vec{b} = \begin{pmatrix}12+4\\-(3+4)\\2+8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}16\\-7\\10\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad |\vec{a}\otimes\vec{b}| = \sqrt{16^2+(-7)^2+10^2} = \sqrt{405}$$

$$= 20{,}125$$

$$\Rightarrow \text{Ergebnis: Flächeninhalt} = \frac{20{,}125}{2} = \underline{\underline{10{,}062}}$$

Zu Aufgabe 2

Berechnen Sie das Volumen des durch folgende 3 Vektoren aufgespannten Spats !

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix},\qquad \vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\4\\7\end{pmatrix},\qquad \vec{c}=\begin{pmatrix}1\\2\\-8\end{pmatrix}$$

Lösung:

$$V=\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right]=\begin{vmatrix}-1 & 1 & -1\\-3 & 4 & 7\\1 & 2 & -8\end{vmatrix}=\left|\begin{array}{ccc|cc}-1 & 1 & -1 & -1 & 1\\-3 & 4 & 7 & -3 & 4\\1 & 2 & -8 & 1 & 2\end{array}\right|$$

$$= (-1)*4*(-8)+1*7*1+(-1)*(-3)*(2)-1*4*(-1)-2*7*(-1)-(-8)*(-3)*(1)$$

$$= 32+7+6+4+14-24$$

$$= 39$$

HTW	**MST Mathematik 1**
	Lösungen zu Übungsblatt 5

Zu Aufgabe 3

Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Geben Sie einen Vektor an, der senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht!

b) Sei $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 4 \end{pmatrix}$ ein dritter Vektor. Wie muss λ gewählt werden, damit $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ komplanar sind?

c) Geben Sie einen weiteren Vektor $\vec{d}$ an, der zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ komplanar, aber nicht parallel zu $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ist!

<u>Lösungen:</u>

Zu a)

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ -2 & 4 & 11 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-55 \\ -(-2+33) \\ -10+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -51 \\ -31 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Zu b)

Bedingung, damit die drei Vektoren komplanar sind: $\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right] = 0$

$$\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right] = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 4 \\ -2 & 4 & 11 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & \lambda & 4 & 1 & \lambda \\ -2 & 4 & 11 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right| = 0$$

$$4 - 33\lambda - 40 + 48 - 55 + 2\lambda = 0$$

$$-31\lambda - 43 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{43}{31}$$

Damit ist der gesuchte Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -43/31 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Zu c) z.B.:

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}$$

HTW	**MST Mathematik 1**
	Lösungen zu Übungsblatt 5

Zu Aufgabe 4

Seien $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 3 Vektoren mit folgenden Eigenschaften: 1. $\vec{a} \parallel (\vec{b} \otimes \vec{c})$ und 2. die Länge von $\vec{a}$ ist 10 und 3. $\vec{b}$ steht senkrecht auf $\vec{c}$. Untersuchen Sie, ob die Vektoren $\vec{a}+2\vec{b}$ und $\vec{a}-3\vec{c}$ senkrecht aufeinander stehen oder nicht!

<u>Lösung:</u>

Es gilt wegen $\vec{a} \parallel (\vec{b} \otimes \vec{c})$ dass

1. $\vec{a} \perp \vec{b}$ (bzw. $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$) und
2. $\vec{a} \perp \vec{c}$ (bzw. $(\vec{a}, \vec{c}) = 0$)

Weiterhin ist:

3. $|\vec{a}| = 10$
4. $\vec{b} \perp \vec{c}$ (bzw. $(\vec{b}, \vec{c}) = 0$)

daraus folgt:

$$(\vec{a}+2\vec{b},\ \vec{a}-3\vec{c}) = |\vec{a}|^2 - 3(\vec{a},\vec{c}) + 2(\vec{a},\vec{b}) - 6(\vec{b},\vec{c}) = 100 \neq 0.$$

D.h., $\vec{a}+2\vec{b}$ und $\vec{a}-3\vec{c}$ stehen nicht senkrecht aufeinander !

Zu Aufgabe 5

Geben Sie 3 Vektoren an, die ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Flächeninhalt 10 bilden! (Mit Begründung!)

<u>Lösung:</u>

Es müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

1) $\vec{a} \perp \vec{b}$
2) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$
3) $\dfrac{|(\vec{a} \otimes \vec{b})|}{2} = 10$

Wir wählen nun einen der 3 Vektoren beliebig.

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$

Es gilt: $\vec{a} \perp \vec{b}$

$|\vec{a} \otimes \vec{b}| = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \lambda = 20$ damit $|\vec{a} \otimes \vec{b}| = 20$ ist.

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ergebnis:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$

Geometrie von Geraden

Zu Aufgabe 6

Zu a) Es ist mit P=(x,y):

$x = 2+6\lambda$

$y = -3+4\lambda$

Wir lösen die erste Gleichung nach λ auf ($\lambda = (x-2)/6$) und setzen das Ergebnis in die 2. Gleichung ein und erhalten die Geradengleichung in Normalform:

$$y = -3 + \frac{4(x-2)}{6} = \frac{2}{3}x - \frac{13}{3}, \; x \in \mathbb{R}.$$

Zu b) Die Geradengleichung $y=-4x+2$, $x \in \mathbb{R}$ erfüllen alle Punkte P=(x,y) mit:

$$\begin{aligned} x &= x \\ y &= -4x + 2 \end{aligned}$$

In Vektorschreibweise: $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, x \in R$

Die Punkt-Richtungsform lautet folglich:

$$g=\{P \mid P=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \lambda \in R\}$$

Zu Aufgabe 7
Wir überprüfen, ob der Punkt die Geradengleichung erfüllt, d.h. ob gilt:

$\exists \lambda \in$ R: $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$. Ausgeschrieben ist diese Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -1 &= 1 + 2\lambda \\ 3 &= 2 + 6\lambda \\ 2 &= 3 + 4\lambda \end{aligned}$$

Aus der ersten Zeile folgt, dass λ = -1 sein muss. Für dieses λ ist aber die 2. und auch die 3. Zeile nicht erfüllt.

D.h. Q liegt nicht auf der Geraden g.

Zu Aufgabe 8

Achtung: Die Lösungen zu den Aufgaben 3a) bis 3e) sind nicht eindeutig!
D.h., im folgenden sind Beispiellösungen angegeben. Andere können aber auch richtig sein.

Zu a)

Richtungsvektor $\vec{a}_2$ von g2: $\vec{a}_2 = \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

(d.h., der Richtungsvektor von g2 ist gleich $\vec{a}_1$ = Richtungsvektor von g1).
Damit sind die beiden Geraden parallel oder gleich.

Aufpunkt P_2 von g2: $P_2 = P_1 + \vec{v}$ **:**

Damit die Geraden g1 und g2 nicht identisch sind, konstruieren wir uns einen Vektor $\vec{v}$, der nicht parallel zu $\vec{a}_1$ ist, also von der Geraden g1 weg zeigt. Z.B. kann $\vec{v}$ ein Vektor sein, der senkrecht auf $\vec{a}_1$ steht:

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Damit ist der Aufpunkt P_2 von g2 z.B.: $P_2 = P_1 + \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ **.**

Lösung: $g2 = \{P \mid P = P_2 + \lambda \vec{a}_2, \lambda \in R\}$

Zu b) Lösung wie unter a) nur dass wir $\vec{v}$ senkrecht zu $\vec{a}_1$ zunächst mit einer Länge von 1 wählen (also normieren) und dann mal 3 nehmen:

Richtungsvektor $\vec{a}_2$ **von g2**: $\vec{a}_2 = \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$,

(damit ist g2 parallel oder gleich g1)

Aufpunkt P_2 von g2: $P_2 = P_1 + 3\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$.

(damit ist der Aufpunkt P2 von P1 3 Längeneinheiten auf der senkrecht zur Geraden g1 verlaufenden Gerade mit Richtungsvektor $\vec{v}$ entfernt).

Zu c)

Richtungsvektor $\vec{a}_2$ **von g2**: $\vec{a}_2 = \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, **Aufpunkt P_2 von g2:** $P_2 = P_1$.

Zu d)
Aufpunkt P_2 von g2: $P_2 = P_1$.

Als **Richtungsvektor** nehmen wir einen Vektor, der weder parallel zu $\vec{a}_1$ ist noch senkrecht auf $\vec{a}_1$ steht: Z.B.: $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zu e)
Den **Aufpunkt P_2 von g2** wählen wir analog zu b):

$P_2 = P_1 + 4\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Den Richtungsvektor wählen wir so, dass er senkrecht auf $\vec{a}_1$ und senkrecht auf $\vec{v}$ steht.
Damit gewährleisten wir, dass sich die Geraden mit Sicherheit nicht schneiden:

z.B. $\vec{a}_2 = \vec{a}_1 \otimes \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix}$

Lösung: $g2 = \{P \mid P = P_2 + \lambda\vec{a}_2, \lambda \in R\}$

HTW	**MST Mathematik 1**
	Lösungen zu Übungsblatt 5

Zu Aufgabe 9
Gegeben seien die Geraden g1 und g2 mit den Aufpunkten P1 bzw.P2 und Richtungsvektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2$. Beschreiben Sie die jeweilige Lage der Geraden zueinander durch Kriterien an die Aufpunkte und Richtungsvektoren, d.h., füllen Sie die leeren Felder folgender Tabelle aus!

Lösung: (mit hellblauem Hintergrund dargestellt):

Kriterium	Lage
$\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2 = \vec{0} \wedge \overrightarrow{P_1P_2} \otimes \vec{a}_1 = \vec{0}$	g1 und g2 sind identisch
$\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2 = \vec{0} \wedge \overrightarrow{P_1P_2} \otimes \vec{a}_1 \neq \vec{0}$	g1 und g2 sind parallel, aber nicht identisch
$\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2 \neq \vec{0} \wedge [\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2] = 0$	g1 und g2 schneiden sich
$\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2 \neq \vec{0} \wedge [\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2] \neq 0$	g1 und g2 sind windschief

Zu Aufgabe 10
Gegeben seien drei Geraden:

g1={P| P= $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \lambda \in R\}$, g2={P| P= $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in R\}$,

g3={P| P= $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \lambda \in R\}$.

Bestimmen Sie die Lage der drei Geraden zueinander! g1? g2, g1?g3 , g2?g3.

Lösung:
Laut Tabelle in Lösung zu Aufgabe 9 gilt:
g1 ist windschief zu g2, g2 schneidet g3, g1 und g3 sind parallel.