HTW — Lösungen zu Übung 6 MST Mathematik I

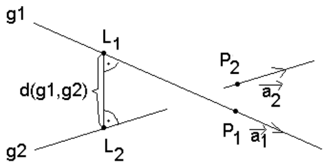
Geometrie von Ebenen — Prof. Dr.B.Grabowski

Zu Aufgabe 1)

a) Entwickeln Sie eine Formel für den Abstand d(g1,g2) zweier windschiefer Geraden

$g_1 = \{P \mid P = P_1 + \lambda\vec{a}_1, \lambda \in R\}$ und $g_2 = \{P \mid P = P_2 + \lambda\vec{a}_2, \lambda \in R\}$!

und geben Sie an, wie sie die beiden Lotpunkte L1 und L2 (siehe Skizze) berechnen!



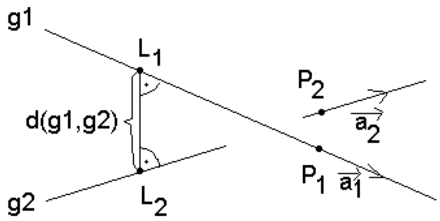
b)Zeigen Sie, dass für den Abstand d(g1,g2)= $|\overrightarrow{L_1L_2}|$ zweier windschiefer Geraden gilt:

$$d(g1, g2) = \left| \frac{[\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2]}{|\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2|} \right|$$

Lösung:

Zu a) Es gilt: $\overrightarrow{L_1L_2} \perp \vec{a}_1$ und $\overrightarrow{L_1L_2} \perp \vec{a}_2$ (1)

siehe Skizze :



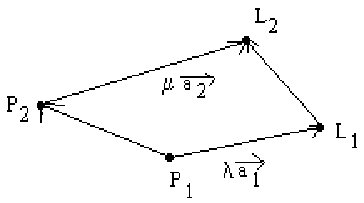
Weiterhin gilt:

$L_1 \in g_1$, d.h. $L_1 = P_1 + \lambda\vec{a}_1$ und $L_2 \in g_2$, d.h. $L_2 = P_2 + \mu\vec{a}_2$. (2)

Aus (1) folgt: $(\overrightarrow{L_1L_2}, \vec{a}_1) = 0$ und $(\overrightarrow{L_1L_2}, \vec{a}_2) = 0$ (3)

Aus (2) folgt: $L_2 - L_1 = P_2 + \mu\vec{a}_2$ - $(P_1 + \lambda\vec{a}_1)$ bzw. wegen $L_2 - L_1 = \overrightarrow{L_1L_2}$, $P_2 - P_1 = \overrightarrow{P_1P_2}$

$$\overrightarrow{L_1L_2} = \overrightarrow{P_1P_2} - \lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2$$ (4) (siehe folgende Skizze).



Setzen wir (4) in die beiden Gleichungen (3) ein, so erhalten wir unter Berücksichtigung der Eigenschaften des Skalarproduktes zwei Gleichungen in λ und μ :

$$(\vec{P_1P_2}, \vec{a}_1) + \lambda(\vec{a}_1, \vec{a}_1) - \mu(\vec{a}_2, \vec{a}_1) = 0$$
$$(\vec{P_1P_2}, \vec{a}_2) + \lambda(\vec{a}_1, \vec{a}_2) - \mu(\vec{a}_2, \vec{a}_2) = 0$$

Diese lösen wir nach λ und μ auf.

Damit erhalten wir gemäß den Gleichungen (2) die Lotpunkte L_1 und L_2 und folglich auch den Abstand :

$$d(g_1, g_2) = |\vec{L_1L_2}|.$$

Zu b) Wir können auch die in der Übungsaufgabe genannte Formel für den Abstand herleiten:

Aus (1) : $\vec{L_1L_2} \perp \vec{a}_1$ und $\vec{L_1L_2} \perp \vec{a}_2$ folgt: $\vec{L_1L_2} = \alpha\,(\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2)$ (5)

d.h. $\vec{L_1L_2}$ ist parallel zu $(\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2)$.

Weiterhin ist nach (4):

$$\vec{L_1L_2} = \vec{P_1P_2} - \lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2 = \alpha\,(\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2) \qquad (6)$$

Daraus folgt:

$$|\vec{L_1L_2}| = |\alpha|\,|\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2| \quad \text{bzw.} \quad |\alpha| = \frac{|\overrightarrow{L_1L_2}|}{|\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2|} \qquad (7)$$

Multiplizieren wir die Gleichung (6) skalar mit $\vec{L_1L_2}$, so erhalten wir:

$$\vec{L_1L_2} = \vec{P_1P_2} - \lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2 = \alpha\,(\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2) \ \mid \cdot \ \vec{L_1L_2}$$
$$\Leftrightarrow \quad (\vec{L_1L_2}, \vec{L_1L_2}) = (\vec{P_1P_2}, \vec{L_1L_2}) - \lambda(\vec{a}_1, \vec{L_1L_2}) + \mu(\vec{a}_2, \vec{L_1L_2})$$
$$\Leftrightarrow \quad (\vec{L_1L_2}, \vec{L_1L_2}) = (\vec{P_1P_2}, \vec{L_1L_2}) \quad \text{(wegen (3))}$$
$$\Leftrightarrow \quad (\vec{L_1L_2}, \vec{L_1L_2}) = (\overrightarrow{P_1P_2}, \alpha(\vec{a}_1 \otimes a_2)) \quad \text{(wegen (6))}$$
$$\Leftrightarrow \quad (\vec{L_1L_2}, \vec{L_1L_2}) = \alpha \cdot (\overrightarrow{P_1P_2}, (\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2))$$
$$\Leftrightarrow |(\vec{L_1L_2}, \vec{L_1L_2})| = |\alpha| \cdot |(\overrightarrow{P_1P_2}, (\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2))|$$
$$\Leftrightarrow |\vec{L_1L_2}|^2 = \frac{|\overrightarrow{L_1L_2}|}{|\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2|} \cdot |(\overrightarrow{P_1P_2}, (\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2))| \quad \text{(wegen (7))}$$

$$\Leftrightarrow |\vec{L_1L_2}| = \frac{|[\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2]|}{|\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2|}$$

Zu Aufgabe 3)

Durch die Gleichung x + 2 y + 2z = 6 sei eine Ebene im R^3 gegeben.

a) Geben Sie einen Vektor an, der senkrecht auf der Ebene steht!
b) Geben Sie einen Vektor an, der parallel zur Ebene verläuft!
c) Geben Sie die Ebene in parametrischer Form an!

Zu a) Der Normalenvektor ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dieser steht senkrecht auf der Ebene.

Zu b) Man bestimmt zwei Punkte P_1 und P_2 , die in der Ebene liegen:

$P_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Der gesuchte zur Ebene parallele Vektor ist dann:

$$\vec{v} = \vec{P_1P_2} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zu c) Man bestimmt 3 Punkte P_1,P_2,P_3, die in der Ebene liegen: $P_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Der Aufpunkt ist dann P_1, die beiden Richtungsvektoren ergeben sich aus

$$\vec{a} = \vec{P_1P_2} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \vec{P_1P_3} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Parameterdarstellung der Ebene:

$$\varepsilon = \left\{ P \mid P = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in R \right\}.$$

Zu Aufgabe 4)

Eine Ebene E sei durch den Aufpunkt $P_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Geben Sie die Ebene in nichtparametrischer und in Parameterform an!
b) Skizzieren Sie die Lage der Ebene im karthesischen Koordinatensystem!

Lösung:
Zu a)
nichtparametrisch: $2y + z = 5$
parametrisch:
Man bestimmt 3 Punkte P_1,P_2,P_3, die in der Ebene liegen, aber nicht auf einer Geraden::

$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. Der Aufpunkt ist dann P_1, die beiden Richtungsvektoren

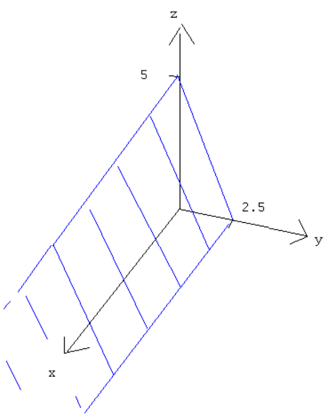
ergeben sich aus $\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Parameterdarstellung der Ebene:

$$\varepsilon = \left\{ P \mid P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in R \right\}$$

Zu b)
Wir gehen von der nichtparametrischen Gestalt der Ebene aus:
$E = \{(x, y, z) \mid 2y + z = 5, \quad x \in R \quad \textit{beliebig}\}$
Die Schnittpunkte mit der y- und z-Achse Sy und Sz sind: Sy=(0,2.5,0) und Sz=(0,0,5).

Skizze der Ebene: Die Ebene lehnt schräg an der x-z-Ebene und verläuft parallel zur x-Achse.



Zu Aufgabe 5)
Gegeben seien die Ebenen E1 , E2 mit den Aufpunkten Q1 bzw. Q2 und den Normalenvektoren $\vec{n}_1, \vec{n}_2$. Beschreiben Sie die jeweilige Lage der Ebenen zueinander, d.h., füllen Sie die rechte Seite folgender Tabelle aus!

Lösung:

Lage	Kriterium
E1 schneidet E2	$\vec{n}_1 \otimes \vec{n}_2 \neq \vec{0}$
E1 ist parallel zu E2	$\vec{n}_1 \otimes \vec{n}_2 = \vec{0} \wedge (\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{n}_1) \neq 0$
E1 ist identisch zu E2	$\vec{n}_1 \otimes \vec{n}_2 = \vec{0} \wedge (\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{n}_1) = 0$

Zu Aufgabe 6)

Durch die Gleichung x + 2 y + 2z = 6 sei eine Ebene É1 im R^3 gegeben.

Eine Ebene E2 sei durch den Aufpunkt $P_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

Welche Lage haben die beiden Ebenen zueinander?

Lösung:

Normalenvektor der Ebene E1 ist: $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Damit ist

$$\vec{n} \otimes \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}.$$ D.h., die Ebenen schneiden sich!

Zu Aufgabe 7)

Seien $E1 = \{P \in R^3 \mid P = P_1 + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}, \quad \lambda, \mu \in R\}$ und $E2 = \{P \in R^3 \mid (\overrightarrow{P_2P}, \vec{n}) = 0\}$ zwei Ebenen mit den Aufpunkten P_1 und P_2.

Es gilt $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}] = 0$ und $(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{n}) = 0$.

Welche Lage haben die Ebenen zueinander?

a) windschief b) schneiden sich, setehen aber nicht senkrecht aufeinander

c) stehen senkrecht aufeinander d) parallel e) identisch f) andere Lage

Lösung: c)

Zu Aufgabe 8)

Geben Sie unter Verwendung von $\vec{a}, \vec{b}, P_g, P_E$ und $\vec{a}_g$ Kriterien an, die die Lage einer Geraden g und einer Ebene E zueinander beschreiben Dabei sind

$$g = \{P \mid P = P_g + \lambda \vec{a}_g, \lambda \in R\} \quad \text{und} \quad E = \{P \mid P = P_E + \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \quad \alpha, \beta \in R\}.$$

a) Wann ist g || E ?
b) Wann ist $g \subseteq E$?
c) Wann schneidet die Gerade g die Ebene E ?

Lösung:

Zu a) g || E $\Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{a}_g$ liegen in einer Ebene und $P_g \notin E$

$$\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}_g] = 0 \wedge (\overrightarrow{P_E P_g}, (\vec{a} \otimes \vec{b})) \neq 0$$

Zu b) $g \subseteq E \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{a}_g$ liegen in einer Ebene und $P_g \in E$

$$\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}_g] = 0 \wedge (\overrightarrow{P_E P_g}, (\vec{a} \otimes \vec{b})) = 0$$

Zu c) g x E $\Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{a}_g$ liegen nicht in einer Ebene

$$\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}_g] \neq 0$$

Zu Aufgabe 9)

Gegeben seien die Geraden g1 und g2 mit den Aufpunkten P1 bzw.P2 und Richtungsvektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ und die Ebenen E1 , E2 mit den Aufpunkten Q1 bzw. Q2 und den Normalenvektoren $\vec{n}_1, \vec{n}_2$. Beschreiben Sie die jeweilige Lage der Geraden und Ebenen zueinander, d.h., füllen Sie die rechte Seite folgender Tabelle aus!

Lösung:

Kriterium	**Lage**
$\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2 = \vec{0} \wedge \overrightarrow{P_1 P_2} \otimes \vec{a}_1 = \vec{0}$	g1 = g2
$(\vec{a}_1, \vec{n}_1) \neq 0$	g1 X E1
$\vec{n}_1 \otimes \vec{n}_2 = \vec{0} \wedge (\overrightarrow{Q_1 Q_2}, \vec{n}_1) = 0$	E1 = E2