HTW	Lösungen zu Übung 7 MST Mathematik I LK's und Lineare Unabhängigkeit Prof. Dr.B.Grabowski

Zu Aufgabe 1

Zu a) Geben Sie die Menge V aller Vektoren im R^3 an, die senkrecht zur Ebene E mit dem Aufpunkt Po = (1; 2; 1) und den Richtungsvektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ verlaufen!

__**Lösung:**__
V enthält offensichtlich alle Vektoren, die parallel zum Normalenvektor der Ebene

$\vec{n} = \vec{a} \otimes \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ verlaufen: $V = \left\{ \vec{v} \in R^3 \mid \vec{v} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in R \right\}$.

Zu b) Geben Sie mindestens 2 verschiedene Erzeugendensysteme und 2 Basen von V an! Wie groß wird die Dimension von V sein?

Lösung:

Die Lösung ist nicht eindeutig, z.B. sind

E1 $= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ und E2$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ 2 Mengen von EZS von V und

B1 $= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ und B2$= \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ 2 Mengen von Basen von V.

D.h. es ist mindestens 1 Vektor für die Erzeugung von V notwendig (= Anzahl der Basisvektoren). Damit ist die Dimension von V = 1.

Zu Aufgabe 2

Zu a) Auf welche Weise kann $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ aus $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{a_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als LK erzeugt werden?

Lösung: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 4\vec{a_1} - 2\vec{a_2}$.

Zu b) Auf welche Weise kann $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ aus $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{a_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als LK erzeugt werden?

Lösung:
Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{rcll} 4 & = & \lambda_1 & \\ -2 & = & \lambda_1 & +\lambda_2 \end{array} \Longrightarrow \lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = -6$.

$\Longrightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 4\vec{a_1} - 6\vec{a_2}$.

Zu c) Auf welche Weise kann $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ aus $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{a_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als LK erzeugt werden?

Lösung:
Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{rclll} 4 & = & \lambda_1 & +\lambda_2 & \\ -2 & = & \lambda_1 & & +\lambda_3 \end{array}$

Wir stellen die erste Gleichung nach λ_2 und die zweite Gleichung nach λ_3 um und erhalten:

$$\begin{array}{rcl} \lambda_2 & = & 4 - \lambda_1 \\ \lambda_3 & = & -2 - \lambda_1 \end{array}$$

Wir können λ_1 beliebig festlegen und erhalten damit unendlich viele Lösungen dieses Systems von zwei Gleichungen. Z.B. erhalten wir für $\lambda_1 = 0$ die Werte $\lambda_2 = 4$ und $\lambda_3 = -2$.

Es gibt folglich unendlich viele Möglichkeiten zur Darstellung von $\vec{v}$, eine davon ist:

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 4\vec{a_2} - 2\vec{a_3}$.

Zu Aufgabe 3

Zu a)

Geben Sie eine LK der Vektoren $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ an, aus der sich der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$ erzeugen lässt!

Lösung:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist nach λ_1, λ_2, λ_3 aufzulösen:

$$\begin{aligned} -4 &= -\lambda_1 + \lambda_2 && (1) \\ 10 &= \lambda_1 \quad + 2\lambda_3 && (2) \\ 8 &= \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 && (3) \end{aligned}$$

(1) nach λ_2 und (2) nach λ_3 umstellen ergibt:

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \lambda_1 - 4 && (1') \\ \lambda_3 &= 5 - \frac{\lambda_1}{2} && (2') \end{aligned}$$

(1') und (2') in (3) eingesetzt ergibt:

$$8 = \lambda_1 - \lambda_1 + 4 + 5 - \frac{\lambda_1}{2} \Leftrightarrow 8 = 9 - \lambda_1 / 2 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2$$

Dieses Ergebnis wieder in (1') und (2') eingesetzt ergibt: $\begin{aligned} \lambda_2 &= -2 \\ \lambda_3 &= 4 \end{aligned}$

Damit ergibt sich das Ergebnis:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zu b) Stellen Sie den Nullvektor als nichttriviale LK der 4 in a) gegebenen Vektoren dar!

!

Lösung: $\vec{0} = -\begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zu Aufgabe 4

a) Prüfen Sie, auf welche Weisen (nur trivial oder auch nichtrivial) Sie den Nullvektor $\vec{0}$ als LK der folgenden Vektormengen erzeugen können, geben Sie die jeweiligen LK' s an:

Zu a1) $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$:

$$\vec{0}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{array}{lllll}0= & \lambda_1 & & +\lambda_3 & (1)\\0= & 2\lambda_1 & +\lambda_2 & & (2)\\0= & \lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & (3)\end{array}$$

Aus (1) folgt: $\lambda_3=-\lambda_1$ (1')
Aus (2) folgt: $\lambda_2=-2\lambda_1$ (2')
(1') und (2') in (3) eigesetzt ergibt: $0=\lambda_1-\lambda_1-2\lambda_1=-2\lambda_1\Leftrightarrow\lambda_1=0$
Daraus folgt wiederum wegen (1') und (2'): $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

D.h., der Nullvektor ist im Fall a1) nur auf triviale Weise durch LK erzeugbar:

$$\vec{0}=0\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Zu a2) $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$:

$$\vec{0}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{array}{lllll}0= & \lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & (1)\\0= & 2\lambda_1 & +\lambda_2 & & (2)\\0= & \lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & (3)\end{array}$$

Aus (1) folgt: $\lambda_3=-\lambda_1-\lambda_2$ (1')
Aus (2) folgt: $\lambda_2=-2\lambda_1$ (2')
(2') in (1') eingesetzt ergibt: $\lambda_3=-\lambda_1+2\lambda_1=\lambda_1$ (1'')
(1'') und (2') in (3) eigesetzt ergibt: $0=\lambda_1-2\lambda_1+\lambda_1=0$, was uns Nichts neues bringt.

Wir erhalten also:

$\lambda_2=-2\lambda_1$, $\lambda_3=\lambda_1$ und λ_1 kann beliebig gewählt werden, z.B. $\lambda_1=\mu$.

Damit ist der Nullvektor im Fall a2) auch auf nichttriviale Weise darstellbar, es gilt:

$$\vec{0} = \mu\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} - 2\mu\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad , \quad \mu \epsilon R \quad \text{beliebig.} \quad (*)$$

Zu b) In welchem der beiden Fälle (a1) oder a2)) kann man einen der 3 Vektoren als LK der beiden anderen darstellen?

Im Falle a2, wenn der Nullvektor auf nicht triviale Weise erzeugbar ist.
Aus (*) folgt:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Zu c) Geben Sie für a1) unda2) an, ob die 3 Vektoren linear unabhängig oder linear abhängig sind! Wie liegen Sie zueinander, wenn sie linear unabhängig sind, wie , wenn sie linear abhängig sind?

a2) linear abhängig, die 3 Vektoren liegen in einer Ebene im R^3 (sie sind komplanar)
a1) linear unabhängig, die 3 Vektoren liegen nicht in einer Ebene, (sie sind nicht komplanar)

Zu Aufgabe 5

Zu a) parallel bei linearer Abhängigkeit, nicht parallel bei linearer Unabhängigkeit

Zu b) Kreuzprodukt muss ungleich dem 0-Vektor sein, falls linear unabhängig:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Das Kreuzprodukt ist ungleich dem Nullvektor , d.h. die beiden Vektoren sind linear unabhängig.

Zu c) Liegen in einer Ebene bei linearer Abhängigkeit, liegen nicht in einer Ebene bei linearer Unabhängigkeit.

Zu d) Spatprodukt muss ungleich 0 sein, falls die 3 Vektoren linear unabhängig sind, =0 bei linearer Abhängigkeit.

Spatprodukt für M1 = $\left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}\right]=0$, $\textit{für} \quad M2=\left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix}\right]=12\neq 0$

→ M1 linear abhängig. M2 linear unabhängig.

Zu e) 4 Vektoren im R^3 sind immer linear abhängig, sie ragen nur in die 3 Richtungen der x-, y- und z-Achse und nicht noch in eine 4. Dimension. (siehe Satz in der Vorlesung).

Zu Aufgabe 6

Die Lösungen sind nicht eindeutig.
Sie werden in der Übung besprochen!

Zu Aufgabe 7
Untersuchen Sie, ob folgende Vektoren linear unabhängig sind:

$$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix},\quad \vec{a}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \vec{a}_3=\begin{pmatrix}0\\2\\-2\\4\end{pmatrix},\quad \vec{a}_4=\begin{pmatrix}3\\6\\1\\8\end{pmatrix}$$

Lösung:

Es gilt:

$$\lambda_1\vec{a}_1+\quad \lambda_2\vec{a}_2+\quad \lambda_3\vec{a}_3+\quad \lambda_4\vec{a}_4=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}+\quad \lambda_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\quad \lambda_3\begin{pmatrix}0\\2\\-2\\4\end{pmatrix}+\quad \lambda_4\begin{pmatrix}3\\6\\1\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccccccccc}\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & + & 3\lambda_4 & = & 0\\ 2\lambda_1 & & & + & 2\lambda_3 & + & 6\lambda_4 & = & 0\\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & + & \lambda_4 & = & 0\\ 2\lambda_1 & & & + & 4\lambda_3 & + & 7\lambda_4 & = & 0\end{array}$$

Es gibt verschiedene Lösungsverfahren. Wir machen hier folgendes:
Wir diagonalisieren das Gleichungssystem (man nennt dieses Verfahren den Gausschen Algorithmus),

indem wir geschickt das Vielfache einer Zeile von einer anderen abziehen.
Dabei formen wir das Gleichungssystem äquivalent um, d.h. es ändert sich die Lösungsmenge nicht bei diesen Umformungen.

1. Schritt:
Die 1. Zeile lassen wir unverändert.
Wir ziehen von der 2. Zeile 2 mal die 1. Zeile ab.
Wir ziehen von der 3. Zeile 1 mal die 1.Zeile ab
Wir ziehen von der 4. Zeile 2 mal die 1.Zeile ab

Ergebnis:

$$\begin{array}{rrrrcl} \lambda_1 & +\ \lambda_2 & & +\ 3\lambda_4 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & & +\ 2\lambda_3 & +\ 6\lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_1 & +\ \lambda_2 & -\ 2\lambda_3 & +\ \lambda_4 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & & +\ 4\lambda_3 & +\ 7\lambda_4 & = & 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rrrrcl} \lambda_1 & +\ \lambda_2 & & +\ 3\lambda_4 & = & 0 \\ & -\ 2\lambda_2 & +\ 2\lambda_3 & & = & 0 \\ & & -\ 2\lambda_3 & -\ 2\lambda_4 & = & 0 \\ & -\ 2\lambda_2 & +\ 4\lambda_3 & +\ \lambda_4 & = & 0 \end{array}$$

2. Schritt:
Von der 4. Zeile ziehen wir die 2. Zeile ab.

$$\begin{array}{rrrrcl} \lambda_1 & +\ \lambda_2 & & +\ 3\lambda_4 & = & 0 \\ & -\ 2\lambda_2 & +\ 2\lambda_3 & & = & 0 \\ & & -\ 2\lambda_3 & -\ 2\lambda_4 & = & 0 \\ & -\ 2\lambda_2 & +\ 4\lambda_3 & +\ \lambda_4 & = & 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rrrrcl} \lambda_1 & +\ \lambda_2 & & +\ 3\lambda_4 & = & 0 \\ & -\ 2\lambda_2 & +\ 2\lambda_3 & & = & 0 \\ & & -\ 2\lambda_3 & -\ 2\lambda_4 & = & 0 \\ & & 2\lambda_3 & +\ \lambda_4 & = & 0 \end{array}$$

3. Schritt:
Zur 4. Zeile addieren wir die dritte Zeile:

$$\begin{array}{rrrrcl} \lambda_1 & +\ \lambda_2 & & +\ 3\lambda_4 & = & 0 \\ & -\ 2\lambda_2 & +\ 2\lambda_3 & & = & 0 \\ & & -\ 2\lambda_3 & -\ 2\lambda_4 & = & 0 \\ & & 2\lambda_3 & +\ \lambda_4 & = & 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rrrrcl} \lambda_1 & +\ \lambda_2 & & +\ 3\lambda_4 & = & 0 \\ & -\ 2\lambda_2 & +\ 2\lambda_3 & & = & 0 \\ & & -\ 2\lambda_3 & -\ 2\lambda_4 & = & 0 \\ & & & -\ \lambda_4 & = & 0 \end{array}$$

Dieses diagonalisierte Gleichungssystem können wir schrittweise von unten nach oben lösen, es ergibt sich als einzige Lösung:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0 .$$

Folglich gilt:

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 + \lambda_4\vec{a}_4 = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0 .$$

Demzufolge sind die 4 Vektoren unter c) linear unabhängig!

Zu Aufgabe 8

Seien $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 3 linear unabhängige Vektoren. Seien $\vec{b}_1 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$, $\vec{b}_2 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_3$, $\vec{b}_3 = \vec{a}_2 + \vec{a}_3$.
Untersuchen Sie unter Verwendung der obigen Definition der linearen Unabhängigkeit, ob $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ linear unabhängig sind!

Lösung:

3 Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sind linear unabhängig, falls gilt:
„aus $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 = \vec{0}$ folgt: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$".

Sei also $\lambda_1\vec{b}_1 + \lambda_2\vec{b}_2 + \lambda_3\vec{b}_3 = \vec{0}$.

$$\Rightarrow \lambda_1(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) + \lambda_2(2\vec{a}_1 - \vec{a}_3) + \lambda_3(\vec{a}_2 + \vec{a}_3) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 + 2\lambda_2)\vec{a}_1 + (\lambda_1 + \lambda_3)\vec{a}_2 + (\lambda_3 - \lambda_2)\vec{a}_3 = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ Wegen der Linearen Unabhängigkeit von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ muss gelten:

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$$
$$\lambda_1 + \lambda_3 = 0$$
$$\lambda_3 - \lambda_2 = 0$$

Wir lösen das GS schrittweise auf und erhalten dann $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

D.h., $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ sind linear unabhängig.