MST	Lösungen zu Übung 9, MST Mathematik I Matrizen, Rang Prof. Dr.B.Grabowski

Matrizenoperationen

Zu Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Transponierten folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Welche dieser Matrizen sind symmetrisch?

Lösung:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 7 & 9 & 3 \end{pmatrix},$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C^T = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nur E ist symmetrisch.

Zu Aufgabe 2

a) x= 1/16, y= 5/8

b) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{1}{16}$, $\quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}}{16} = \dfrac{10}{16}$

Zu Aufgabe 3

Gegeben seien folgende Messdatenpaare: (2,3) und (5,1).
Geben Sie die Gerade y=ax+b an, die durch die beiden Punkte verläuft, indem Sie

Zu a) Gleichungssystem (GS):
Es ist y = ax+b , demzufolge erfüllen die beiden Messdatenpaare das GS:

3 = 2a + b
1 = 5a + b

In Matrizenschreibweise lautet das GS: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zu b) Lösung mittels Cramerscher Regel:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3-1}{2-5} = -\frac{2}{3} \quad \text{und} \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2-15}{2-5} = \frac{13}{3}$$

Die Gerade lautet also y = -2/3 x + 13/3.

Zu Aufgabe 4

Berechnen Sie die Lösung z des folgenden Gleichungssystems mittels Cramerscher Regel:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 2 \\ -4x + 2y + 2z &= 1 \\ x - y - 2z &= -1 \end{aligned}$$

Lösung: Nach CR ist

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-4+3+8-(4-2+12)}{-8-4+6-(-2-4+24)} = \frac{7-14}{-6-18} = \frac{7}{24}$$

(Die Determinanten sind das Spatprodukt der 3 Zeilenvektoren und werden mit der Sarussschen Regel berechnet).

Zu Aufgabe 5

Durch folgende 3 Messpunkte (x_i,y_i) , i=1,...,4 geht genau ein Polynom 2. Grades

y= $ax^2 + bx + c$.

xi	-1	0	2
yi	0	1	1

Bestimmen Sie die Koeffizienten a-c dieses Polynoms, indem Sie zunächst ein Gleichungssystem aufstellen und dieses dann mittels der Cramerschen Regel lösen!

Lösung:

Aus der Beziehung $y_i = ax_i^2 + bx_i + c$, die für jeden der 3 Punkte (xi,yi) gelten muss, erhalten wir das Gleichungssystem:

$$A \cdot \vec{v} = \vec{y}$$

$$\text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Wir lösen es durch Anwendung der Cramerschen Regel:

Es ist

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0+2-1-(0+0-1)}{0+0-4-(0+2+0)} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1+0+0-(4+1+0)}{-6} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0+0-4-(0+0+2)}{-6} = \frac{-6}{-6} = 1$$

Das Polynom lautet folglich: $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$.

MST	Lösungen zu Übung 9, MST Mathematik I Matrizen, Rang Prof. Dr.B.Grabowski

Zu Aufgabe 6

Seien $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Matrix C= (2A -3B)^T

Lösung:
Es ist:

$$(2A-3B)^T = \left(\begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 9 & 3 \\ 3 & 12 & 9 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -1 & -8 & -7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & -8 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

Zu Aufgabe 7

Multiplizieren Sie jeweils die Matrizen A und B miteinander, sofern dies möglich ist!
Begründen Sie ggf., warum die Matrizenmultiplikation nicht möglich ist!

a) $A = \begin{pmatrix} 43 \\ 11 \\ 23 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung:

Zu a) und zu b) Produkt AB ist nicht definiert, da Spaltenanzahl von A $\neq$ Zeilenanzahl von B und das Produkt BA ist nicht definiert, da Spaltenanzahl von B $\neq$ Zeilenanzahl von A ist.

Zu c) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4\cdot 1 & 4\cdot 3 & 4\cdot 1 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 3 & 2\cdot 1 \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 3 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 9 & 3 \end{pmatrix}$ und $B \cdot A = 13$

Zu d) $A \cdot B = 2\cdot 4 + 1\cdot 1 + 1\cdot 3 = 12$ und B·A = $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Zu e) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1\cdot 4+0\cdot 2+0\cdot 1 & 1\cdot 0+0\cdot 3+0\cdot 2 & 1\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 1 \\ 0\cdot 4+1\cdot 2+0\cdot 1 & 0\cdot 0+1\cdot 3+0\cdot 2 & 0\cdot 0+1\cdot 0+0\cdot 1 \\ 0\cdot 4+0\cdot 2+1\cdot 1 & 0\cdot 0+0\cdot 3+1\cdot 2 & 0\cdot 0+0\cdot 0+1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ = B

und analog: B·A=B.

MST	Lösungen zu Übung 9, MST Mathematik I Matrizen, Rang Prof. Dr.B.Grabowski

Zu Aufgabe 8

Seien $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Matrix $C = A^T \cdot B$ und $D = B^T A$.
Wie hängen C und D miteinander zusammen?

b) Berechnen Sie die Matrix $F = (2A - 3B)^T \cdot B$

Lösung:

Zu a)

Es ist $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ und folglich $C = A^T \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 5 \\ 2 & 15 & 9 \\ 1 & 10 & 5 \end{pmatrix}$.

Es ist $B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ und folglich ist $D = B^T \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 10 & 15 & 10 \\ 5 & 9 & 5 \end{pmatrix}$.

Offensichtlich gilt:

$\mathbf{C^T = D}$ **bzw.** $\mathbf{(A^T \cdot B)^T = B^T \cdot A}$

Zu b)
Es ist:

$$\mathbf{(2A - 3B)^T} = \left(\begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 9 & 3 \\ 3 & 12 & 9 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -1 & -8 & -7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & -8 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

und folglich:

$$C = (2A - 3B)^T \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & -8 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 1 \\ -8 & -41 & -27 \\ -7 & -25 & -20 \end{pmatrix}$$