MST Übung 12 Mathematik 1

Prof.Dr.B.Grabowski e-mail: grabowski@htw-saarland.de Tel.: 5867-424

Determinanten:

Aufgabe 1:

Die Determinante einer 2x2 – Matrix A ist wie folgt definiert:

det(A) = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

Bestimmen Sie den Wert folgender Determinanten:

$a)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} \quad b)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \quad c)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

Aufgabe 2:

Lösen Sie folgendes Gleichungssystem mit Hilfe der Cramerschen Regel:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 &= 12 \\ -x_1 + 8x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Überprüfen Sie Ihre Lösung, indem Sie die Probe machen!

Aufgabe 3:

Die Determinante det(A) einer 3x3 – Matrix A ist als Spatprodukt der 3 Spaltenvektoren von A (oder alternativ: Spatprodukt der 3 Zeilenvektoren) definiert (Es gilt det(A) = det(A^T)).

Bestimmen Sie den Wert der Determinanten folgender Matrizen:
(z.B. mit der Sarrus'schen Regel).

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4:

Die Cramersche Regel gilt auch allgemein für quadratische Gleichungssysteme mit n Gleichungen und n Unbekannten für n > 2. D.h zum Beispiel, die Lösung x_i des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

besitzt die Gestalt $x_i = \dfrac{\det(D_i)}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$, wobei Di die Matrix ist, die man erhält, wenn

man die i.te Spalte von A durch den Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ der rechten Seite des

Gleichungssystems ersetzt.

Lösen Sie mit Hilfe der Cramerschen Regel nun folgende Aufgabe:

Gegeben seien die Messwertepaare

Xi	-1	1	2
Yi	2	1	2

Geben Sie die Parabel y = ax^2 + bx + c an, die durch die o.g. 3 Messpunkte (xi,yi), i=1,2,3, verläuft.

Aufgabe 5:

Determinanten von quadratischen Matrizen A=$((a_{ij}))_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,n}$ höherer Ordnung n xn (n > 3) berechnet man mit der folgenden Rekursionsformel:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} (-1)^{1+j} D_{1j}$$

wobei D_{1j} die Determinanten der Matrix ist, die man aus A erhält, wenn man die 1.te Zeile und j.te Spalte streicht.
(Man sagt: Man entwickelt die Determinante von A nach der 1. Zeile von A)

Beispiel:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Die 4 Determinanten 3.Ordnung berechnen wir nun mittels der Sarrusschen Regel und erhalten:

det(A) = 2·(-1) -1·1 + 3· (- (-1)) -4 · 0 = 0

Aufgabe:
Berechnen Sie folgende Determinante, indem Sie diese nach der 1. Zeile entwickeln.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 6:

Der sogenannte Laplac'sche Entwicklungsssatz besagt, dass man Determinanten nicht unbedingt nach der 1. Zeile, sondern nach einer beliebigen Zeile oder Spalte entwickeln kann.

Satz: (Laplace'scher Entwicklungssatz)

Es gilt:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} D_{ij} \quad \text{für ein beliebiges i=1,...,n} \quad \text{(Entwicklung nach der i.ten Zeile)}$$

und auch

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} D_{ij} \quad \text{für ein beliebiges j=1,...,n} \quad \text{(Entwicklung nach der j.ten Spalte)}$$

wobei D_{ij} die Determinanten der Matrix ist, die man aus A erhält, wenn man die i.te Zeile und j.te Spalte streicht.

Beispiel: Wir betrachten die Beispiel-Matrix aus Aufgabe 4:
Wir entwickeln die Determinante von A nun nach einer Zeile oder Spalte, **die möglichst viele 0 enthält.** D.h., wir entwickeln nach der 4. Zeile.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2 - (-3) - 1) = 0$$

Damdurch, dass wir uns die Zeile oder Spalte beliebig ausssuchen können, kann man den Aufwand der Determinantenberechnung erheblich reduzieren.

Aufgabe:
Berechnen Sie den Wert der nachstehenden Determinanten mittels Laplac'schen Entwicklungssatz!

a) $\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ b) det(A)= $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$

c) $\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 13 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Aufgabe 7:

Bestimmen Sie die Lösung x_3 des folgenden linearen Gleichungssystems mittels Cramerscher Regel:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_2 + 3x_3 &= -1 \\ x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$