HTW	Übung 7 MST Mathematik I LK's und Lineare Unabhängigkeit Prof. Dr.B.Grabowski

Aufgabe 1

a) Geben Sie die Menge V aller Vektoren im R^3 an, die senkrecht zur Ebene E mit dem Aufpunkt Po = (1; 2; 1) und den Richtungsvektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ verlaufen!

b) Geben Sie mindestens 2 verschiedene Erzeugendensysteme und 2 Basen von V an! Wie groß wird die Dimension von V sein?

Aufgabe 2

a) Auf welche Weise kann $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ aus $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{a_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als LK erzeugt werden?

b) Auf welche Weise kann $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ aus $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{a_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als LK erzeugt werden?

c) Auf welche Weise kann $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ aus $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{a_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als LK erzeugt werden?

Aufgabe 3

a) Geben Sie eine LK der Vektoren $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ an, aus der sich der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$ erzeugen lässt!

b) Stellen Sie den Nullvektor als nichttriviale LK der 4 in a) gegebenen Vektoren dar!

Aufgabe 4

a) Prüfen Sie, auf welche Weisen (nur trivial oder auch nichtrivial) Sie den Nullvektor $\vec{0}$ als LK der folgenden Vektormengen erzeugen können, geben Sie die jeweiligen LK' s an:

a1) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ a2) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

b) In welchem der beiden Fälle (a1) oder a2)) kann man einen der 3 Vektoren als LK der beiden anderen darstellen?

c) Geben Sie für a1) und a2) an, ob die 3 Vektoren linear unabhängig oder linear abhängig sind!
Wie liegen Sie zueinander, wenn sie linear unabhängig sind, wie , wenn sie linear abhängig sind?

Aufgabe 5

a) Wie müssen 2 Vektoren im R^3 zueinander liegen, die linear abhängig sind, wie liegen sie zueinander, wenn sie linear unabhängig sind?

b) Prüfen Sie mit Hilfe eines der 3 Vektorprodukte (Skalar-, Kreuz-, Spatprodukt), ob $\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ linear unabhängig sind!

c) Wie müssen 3 Vektoren im R^3 zueinander liegen, die linear abhängig sind? Wie liegen sie, wenn sie linear unabhängig sind?

d) Prüfen Sie mit Hilfe eines der 3 Vektorprodukte (Skalar-, Kreuz-, Spatprodukt), ob die Mengen M1 und M2 jeweils linear abhängige oder linear unabhängige Vektoren enthalten!

$$M1=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}\right\} \quad , \quad M2=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

e) Sind die 4 Vektoren aus $M3=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\right\}$ linear abhängig oder linear unabhängig?

(Begründung angeben!)

Aufgabe 6
Sei R^3 die Menge aller Vektoren mit 3 Komponenten und R^4 die Menge aller Vektoren mit 4 Komponenten.

a) Geben Sie 2 linear unabhängige Vektoren im R^3 an!
b) Geben Sie 3 linear unabhängige Vektoren im R^3 an!
c) Geben Sie 3 linear abhängige Vektoren im R^3 an!
d) Geben Sie 4 linear abhängige Vektoren im R^3 an!
e) Geben Sie 4 linear unabhängige Vektoren im R^4 an!

Aufgabe 7

k Vektoren $\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_k$ sind linear unabhängig, falls gilt:

„aus $\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{a}_2+...+\lambda_k\vec{v}_k=\vec{0}$ folgt: $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_k=0$“.

Untersuchen Sie mit diesem Kriterium, ob folgende Vektoren linear unabhängig sind:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8

Seien $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 3 linear unabhängige Vektoren.

Seien $\vec{b}_1 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$, $\vec{b}_2 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_3$, $\vec{b}_3 = \vec{a}_2 + \vec{a}_3$.

Untersuchen Sie unter Verwendung des in Aufgabe 5) genannten Kriteriums, ob $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ linear unabhängig sind!