MST	Lösung zu Übung 10 Mathematik I Matrizen, Rang, Gausscher Algorithmus Prof. Dr.B.Grabowski

Zu Aufgabe 1

Der Rang einer Matrix ist gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilen- bzw. Spaltenvektoren dieser Matrix

Zu Aufgabe 2

Geben Sie den Rang der folgenden Matrizen A – E durch „Draufschauen“ an !

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:
rg(A)=1 (nur eine Zeile), $rg(B) = 1$ (nur eine Spalte),
$rg(C) = 3$ (Diagonalform), $rg(D) = 4$ (Diagonalform), $rg(E) = 2$ (Diagonalform).

Zu Aufgabe 3

Bestimmen Sie den Rang folgender Matrizen:

$$a) A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad b) B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 7 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Zu a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{Z1 mit Z3 vertauschen}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} Z2' = Z2 - 3Z1 \\ Z3' = Z3 - 2Z1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow rg(A) = 3$$

Zu b)

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 7 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \text{ Z1 mit Z2 vertauschen } \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 7 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ Z2-4Z1 \\ Z3-2Z1 \\ Z4-7Z1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -14 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -13 & -26 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -\frac{13}{7}Z2+Z4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -14 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{46}{7} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ rg(B)=4}$$

Zu Aufgabe 4

Untersuchen Sie mittels GA, ob folgende 4 Vektoren linear unabhängig sind!

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Schreibt man die Vektoren als Zeilen (!), dann lautet die zu untersuchende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$ .Wir bestimmen den Rang von A indem wir die Matrix durch geschickte

Anwendung erlaubter (d.h. den Rang nicht ändernder) Operationen diagonalisieren:

$$\text{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -Z1 \\ \\ -3Z1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +Z2 \\ \\ \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -Z3 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A) = 3$$

Das heißt, die 4 Vektoren sind nicht linear unabhängig!

Zu Aufgabe 5

Welche Dimension besitzt der folgende Vektorraum?

$$V = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_1, a_2, \ldots, a_4 \in R \right\}$$

Begründen Sie Ihre Antwort!

<u>**Lösung:**</u>

Wir schreiben die 4 erzeugenden Vektoren zeilenweise in eine Matrix A. Mittels GA zur Rangbestimmung erhält man: rg(A) = 3. Demzufolge sind 3 Erzeugendenvektoren linear unabhängig und bilden damit eine Basis in V. Demzufolge ist dim(V)=3.

Zu Aufgabe 6

Zu a) Schreiben Sie folgendes lineare GS in Matrizenschreibweise!

$$\begin{array}{rrrrcl} 2x_1 + & 5x_2 - & x_3 & & = & 0 \\ -x_1 + & 8x_2 + & 8x_3 - & 4x_4 & = & 0 \\ 4x_1 + & 2x_2 - & 16x_3 + & 10x_4 & = & 0 \\ & x_2 + & x_3 - & 4x_4 & = & 0 \end{array} \qquad (1)$$

Lösung:

Das o.g. GS kann man wie folgt in Matrizenschreibweise schreiben:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & 8 & 8 & -4 \\ 4 & 2 & -16 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Zu b) Offensichtlich ändern die 3 Operationen des GA die Lösungsmenge des GS nicht, d.h.
- die Vertauschung von Zeilen,
- die Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl,
- die Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen

sind äquivalente Umformungen des GS.

Lösen Sie nun dieses lineare GS mittels GA bzw. durch geschickte Anwendung der 3 o.g. Operationen auf die Zeilen des GS!

MST	Lösung zu Übung 10 Mathematik I Matrizen, Rang, Gausscher Algorithmus Prof. Dr.B.Grabowski

Lösung:

Wenden wir die 3 Operationen des GA zur Rangbestimmung auf die Zeilen des GS (1) an, so bleibt die rechte Seite gleich 0 und die Koeffizientenmatrix wird in Diagonalform gebracht, d.h. unser GS wird dreieckig!

Wir beschreiben das o.g. GS (1) kurz durch die Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & 8 & 8 & -4 \\ 4 & 2 & -16 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$ und wenden auf A den GA zur Rangbestimmung an. Wir erhalten:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & 8 & 8 & -4 \\ 4 & 2 & -16 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} Z2 <-> Z1 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 8 & 8 & -4 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -16 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ Z2+2Z1 \\ Z3+4Z1 \\ \\ \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 8 & 8 & -4 \\ 0 & 21 & 15 & -8 \\ 0 & 34 & 16 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ Z2 \\ <-> \\ Z4 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 8 & 8 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 34 & 16 & -6 \\ 0 & 21 & 15 & -8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ Z3-34Z2 \\ Z4-21Z2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 8 & 8 & -4 \\ 0 & 21 & 15 & -8 \\ 0 & 0 & -18 & 130 \\ 0 & 0 & -7 & 76 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ Z4-\frac{7}{18}Z3 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 8 & 8 & -4 \\ 0 & 21 & 15 & -8 \\ 0 & 0 & -18 & 130 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{229}{9} \end{pmatrix}$$

Demzufolge haben wir unser GS (1) durch die Anwendung des GA auf die Koeffizientenmatrix A äquivalent in folgendes „dreieckiges" GS umgeformt:

$$\begin{array}{rrrrcl} -x_1 + & 8x_2 + & 8x_3 - & 4x_4 & = & 0 \\ & 21x_2 + & 15x_3 - & 8x_4 & = & 0 \\ & & -18x_3 + & 130x_4 & = & 0 \\ & & & \frac{229}{9}x_4 & = & 0 \end{array}$$

Lösen wir dieses von unten nach oben auf, so ergibt sich nur die triviale Lösung:

$x_4 = x_3 = x_2 = x_1 = 0$ als einzige Lösung des o.g. GS (1).