HTW Mathematik 1 MST
Prof.Dr.B.Grabowski e-mail: grabowski@htw-saarland.de Tel.: 5867-424
Lösungen zu Übung 11

Homogene Gleichungssysteme, Gausscher Algorithmus

Zu Aufgabe 1

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaus‘schen Algorithmus die jeweilige Lösungsmenge folgender Gleichungssysteme!
Geben Sie im Falle der Lösbarkeit des GS die Lösungsmenge als Vektorraum an und geben Sie die Dimension und die Basis an!

a) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_3 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} -2x_1 &= -x_2 - x_3 \\ x_1 - 2x_2 &= -x_3 \\ x_1 + x_2 &= 2x_3 \end{aligned}$$

Lösung:
Zu a)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_3 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix} * \vec{x} = \vec{0}$$

Mittels Gaus’schem Algorithmus diagonalisieren wir das Gleichungssystem (GS).

(*Bemerkung:* die rechte Seite des Gleichungssystems ist $\vec{b} = \vec{0}$. Deshalb können wir bei der Matrix (A|$\vec{b}$) $\vec{b}$ weglassen, also nur die Koeffizientenmatrix A betrachten, da diese Spalte $\vec{b}$ immer gleich $\vec{0}$ bleibt, egal, welche Operation des Gausschen Algorithmus wir anwenden).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ Z2+2Z1 \\ Z3-5Z1 \\ Z2-2Z1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 7 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ Z2+2Z1 \\ Z3+3Z2 \\ Z4-2Z2 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ Z4-Z3/4 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^*$$

Das o.g. GS können wir also äquivalent durch folgende Diagonalgestalt darstellen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_3 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

D.h., die Lösungsmenge des GS ist folgender Vektorraum der Dimension 0:
L= { $\vec{0}$}

Hier ist Rg (A*) = 3=n, wobei n=3 die Anzahl der Unbekannten ist.
Das GS hat in diesem Fall (Rg(A) = n) genau eine Lösung und zwar die sogenannte triviale Lösung $\vec{x} = \vec{0}$

Zu b)

$$\begin{aligned} &1.) -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ &2.) x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ &3.) x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} * \vec{x} = \vec{0}$$

Mittels Gaus'schem Algorithmus diagonalisieren wir das GS.

(*Bemerkung:* die rechte Seite des Gleichungssystems ist $\vec{b} = \vec{0}$. Deshalb können wir bei der Matrix (A|$\vec{b}$) $\vec{b}$ weglassen, also nur die Koeffizientenmatrix A betrachten, da diese Spalte $\vec{b}$ immer gleich $\vec{0}$ bleibt, egal, welche Operation des Gausschen Algorithmus wir anwenden).

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} Z1 \leftrightarrow Z3 \quad \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ Z2 - Z1 \rightarrow \\ Z3 + 2Z1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ Z3 + Z2 \end{matrix} \quad \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^*$$

$\Rightarrow$ es gibt unendlich viele Lösungen.

Lösung des GS:

Das GS hat die Diagonalgestalt:
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -3x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Wir haben 2 Gleichungen und 2 Unbekannte, d.h., eine Unbekannte, wir wählen x3, können wir beliebig wählen. Anschließend lösen wir die beiden Gleichungen von unten nach oben nach x_1 und x_2 auf. Wir erhalten:

$x_3 = \lambda$.
$x_2 =$ a
$x_1 =$ a

Prof.Dr.B.Grabowski e-mail: grabowski@htw-saarland.de Tel.: 5867-424
Lösungen zu Übung 11

D.h., die Lösungsmenge des GS ist folgender Vektorraum der Dimension 1:

L= { $\vec{x}$ | $\vec{x} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a \in$R }. Basisvektor=$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Hier ist Rg (A*) = 2 < n, wobei n=3 die Anzahl der Unbekannten ist.
Das GS hat in diesem Falle (Rg(A) < n) unendlich viele Lösungen.
Die Dimension des Lösungsraumes (= Lösungsmenge) ist d=n - Rg(A*) =1 (= Anzahl der frei wählbaren Unbekannten).

Da es ein homogenes GS ($\vec{b} = \vec{0}$) ist, ist der Lösungsraum ein *Vektorraum* der Dimension d=1.

Bemerkung: Es gilt folgende allgemeine Regel:
Homogene lineare GS sind immer lösbar:
Fall: Rg(A) = n --> Das GS hat gnau eine Lösung (die triviale)
Fall: Rg(A) < n --> Das GS hat unendlich viele Lösungen. Die Lösungsmenge ist ein Vektorraum der Dimension dim(L) = n-Rg(A).

Zu Aufgabe 2

Gegeben sei folgendes homogene lineare Gleichungssystem:

$$ax_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + ax_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 + ax_3 = 0$$

Für welche $a \in$ R ist dieses GS

a) Eindeutig lösbar?
b) Mehrdeutig lösbar?
c) Geben Sie im Falle der eindeutigen Lösbarkeit die Lösung an!
d) Geben Sie im Falle der mehrdeutigen Lösbarkeit die Lösungsmengen als Vektorraum an und geben Sie dazu die Dimension und die Basis des Vektorraumes mit an!

Lösung:

Das Gleichungssystem

$$ax_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + ax_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 + ax_3 = 0$$

ist äquivalent zur Matrix $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, auf die wir den Gaus‘schen Algorithmus anwenden.

Prof.Dr.B.Grabowski e-mail: grabowski@htw-saarland.de Tel.: 5867-424

Lösungen zu Übung 11

<u>Gaus'scher Algorithmus:</u>

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \underset{\substack{Vertauschen \\ der Spalten \\ 1\ und\ 3}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ Z2 - Z1 \rightarrow \\ Z3 - aZ1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ Z3 + Z2 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{pmatrix}$$

<u>Lösbarkeitsbedingungen:</u>

Zu a) eindeutig lösbar, falls rg(A) = rg(A| $\vec{b}$) = 3, also falls det(A)≠0. Dazu müssen alle Diagonalelemente der Matrix ≠0 sein.
D.h., eindeutig lösbar ⇔ a-1≠ 0 ∧ $-a^2-a+2 \neq 0$.
Die Lösung der Gleichung $-a^2-a+2 = 0$ ergibt: $a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow$

$$a_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

D.h., das GS ist eindeutig lösbar, falls gilt: a ÷ 1 ė $a \neq -2$

Zu c) Die einzige Lösung im Falle der eindeutigen Lösbarkeit ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Zu b)

➔ Mehrdeutig lösbar für a=1 und für a = -2.

Zu d)
Wir untersuchen nun die anderen Fälle:

Fall a=1:

$$\mathrm{A} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Unser GS A $\vec{x} = \vec{0}$ haben wir äquivalent in das GS (die Gleichung)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

umgeformt.
Offensichtlich können wir x2 und x3 beliebig wählen und erhalten als Lösungen:

HTW Mathematik 1 MST
Prof.Dr.B.Grabowski e-mail: grabowski@htw-saarland.de Tel.: 5867-424
Lösungen zu Übung 11

$$\begin{aligned} x_1 &= -\text{ª} - \text{«} \\ x_2 &= \text{ª} \qquad\qquad \lambda\in R, \mu \in R. \\ x_3 &= \text{«} \end{aligned}$$

Diese Lösungen in Vektorschreibweise dargestellt ergibt die Lösungsmenge:

$$L = \left\{ \vec{x} \in R^3 \mid \vec{x} = \text{ª} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{«} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ª}, \text{«} \in R \right\}$$

Diese Lösungsmenge ist ein Vektorraum der Dimension 2 mit der Basis $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Fall a= -2:

$$\mathrm{A} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Unser GS A $\vec{x} = \vec{0}$ haben wir äquivalent in das GS (die Gleichung)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

umgeformt.
Offensichtlich können wir x2 und x3 beliebig wählen und erhalten als Lösungen:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\text{ª} - \text{«} \\ x_2 &= \text{ª} \qquad\qquad \lambda\in R, \mu \in R. \\ x_3 &= \text{«} \end{aligned}$$

Diese Lösungen in vektorschreibweise dargestellt ergibt die Lösungsmenge:

$$L_{a=1} = \left\{ \vec{x} \in R^3 \mid \vec{x} = \text{ª} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{«} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ª}, \text{«} \in R \right\}$$

Diese Lösungsmenge ist ein Vektorraum der Dimension 2 mit der Basis $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

HTW Mathematik 1 MST
Prof.Dr.B.Grabowski e-mail: grabowski@htw-saarland.de Tel.: 5867-424
Lösungen zu Übung 11

Fall a= -2:

$$A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Unser GS A $\vec{x} = \vec{0}$ haben wir äquivalent in das GS (die Gleichung)

$x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$
$-3x_2 + x_3 = 0$

umgeformt.
Offensichtlich können wir x3 beliebig wählen und erhalten dann
mit $x_3 = \lambda$:

$x_1 + x_2 = 2\lambda$
$3x_2 = \lambda$

Lösen wir dieses GS von unten nach oben auf, so erhalten wir die Lösungen:

$x_1 = (5/3)$ª
$x_2 =$ ª $/3$ $\lambda \in R$
$x_3 =$ ª

Diese Lösungen in vektorschreibweise dargestellt ergibt die Lösungsmenge:

$$L_{a=1} = \left\{ \vec{x} \in R^3 \mid \vec{x} = \text{ª} \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ª} \in R \right\}$$

Diese Lösungsmenge ist ein Vektorraum der Dimension 1 mit dem einzigen Basisvektor

$$\begin{pmatrix} 5/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Inhomogene Gleichungssysteme, Gausscher Algorithmus

Zu Aufgabe 3

Zu a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & 8 & 8 & -4 \\ 4 & 2 & -16 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -13 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Prof.Dr.B.Grabowski e-mail: grabowski@htw-saarland.de Tel.: 5867-424
Lösungen zu Übung 11

Wir formen das Gleichungssystem durch Anwendung des GA äquivalent in Diagonalgestalt um:

$$(A\,|\,\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 4 & 2 & -16 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \end{array}\right) \quad \text{Zeilen vertauschen:}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ 4 & 2 & -16 & 10 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ Z3+4Z1 \\ Z4+2Z1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 34 & 16 & -6 & -52 \\ 0 & 21 & 15 & -8 & -27 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ Z3-34Z2 \\ Z4-21Z2 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -18 & 130 & -18 \\ 0 & 0 & -6 & 76 & -6 \end{array}\right) \quad 3.Z \text{ und } 4.Z \text{ vertauschen und halbieren}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 38 & -3 \\ 0 & 0 & -9 & 65 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ Z4-3Z3 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 38 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -49 & 0 \end{array}\right)$$

Demzufolge erhalten wir die folgende Diagonalgestalt und die Lösungen:

$$\begin{aligned} &-49x_4 = 0 \Rightarrow x_4 = 0 \\ &-3x_3 = -3 \Rightarrow x_3 = 1 \\ &x_2 + 1 = -1 \Rightarrow x_2 = -2 \\ &-x_1 - 16 + 8 = -13 \Rightarrow x_1 = 5 \end{aligned}$$

Hier ist Rg(A*) = Rg(A*|$\vec{b}$ *) = n=4$\Rightarrow$ Das GS ist eindeutig lösbar!

Lösungsmenge: $L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Prof.Dr.B.Grabowski e-mail: grabowski@htw-saarland.de Tel.: 5867-424
Lösungen zu Übung 11

Zu b)

$$\begin{aligned} &1.)\, x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ &2.)\, -2x_1 + x_3 = -2 \\ &3.)\, 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ &4.)\, 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 5 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix} * \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Mittels Gaus'schem Algorithmus diagonalisieren wir das GS:

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & -3 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ Z2+2Z1 \\ Z3-5Z1 \\ Z4-2Z1 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 7 & -6 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ Z3+3Z2 \\ Z4-2Z2 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ Z4-\frac{1}{4}Z3 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) = (A^*|\vec{b}^*)$$

Hier ist Rg(A*) $\neq$ Rg(A*|$\vec{b}$ *) bzw. Rg(A) $\neq$ Rg(A|$\vec{b}$)$\Rightarrow$ Das GS ist nicht lösbar!

Lösungsmenge: L = Φ

Zu c)

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 = 2x_3 + 7 \\ &2x_1 = -3x_2 \\ &2x_1 + x_2 + 8x_3 + 28 = 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} * \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -28 \end{pmatrix}$$

Mittels Gaus'schem Algorithmus diagonalisieren wir das GS:

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 7 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 8 & -28 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ Z2-2Z1 \\ Z3-2Z1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 4 & -14 \\ 0 & -3 & 12 & -42 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ Z3-3Z2 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 4 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (A^* | \vec{b}^*)$$

Es ist rg(A)=rg(A*) =2 und $rg(A\,|\,\vec{b}) = rg(A^*\,|\,\vec{b}^*)$ =2.

HTW Mathematik 1 MST

Prof.Dr.B.Grabowski e-mail: grabowski@htw-saarland.de Tel.: 5867-424

Lösungen zu Übung 11

Hier ist rg(A) = rg(A| $\vec{b}$) = 2 < 3. D.h. das GS hat unendlich viele Lösungen. Die Lösungsmenge ist ein affiner Raum der Dimension d=n-rg(A) = 3-2 = 1, also eine Gerade.

Berechnung der Lösungsmenge:

Aus der diagonalisierten Matrix ergibt sich folgende Diagonalgestalt des GS:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 7 \\ -x_2 + 4x_3 &= -14 \end{aligned}$$

Wir haben 2 Gleichungen und 2 Unbekannte, d.h., eine Unbekannte, wir wählen x_3, können wir beliebig wählen. Anschließend lösen wir die beiden Gleichungen von unten nach oben nach x_1 und x_2 auf. Wir erhalten:

$x_3 = \lambda$.

$$\begin{aligned} x_2 &= 14 + 4x_3 = 14 + 4\lambda \\ x_1 &= 7 - 2x_2 + 2x_3 = 7 - 28 - 4\lambda + 2\lambda = -21 - 2\lambda \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Lösungsmenge ist also:

$$L = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Bigg| \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -21 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in R \right\}$$

Aufpunkt: $\begin{pmatrix} -21 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix}$ **,** ***Basisvektor:*** $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zu Aufgabe 4

Für welche Werte von t bildet die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 3x_1 + tx_2 - x_3 &= \frac{14}{3} \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 &= 5 \\ 5x_1 + 8x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

eine Gerade? Wie lautet in diesem Fall die Lösung des Gleichungssystems?

Lösung:

Das Gleichungssystem ist äquivalent mit folgender Matrix

Prof.Dr.B.Grabowski e-mail: grabowski@htw-saarland.de Tel.: 5867-424
Lösungen zu Übung 11

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & t & -1 & \frac{14}{3} \\ 2 & -1 & -2 & 5 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \end{array}\right) \text{Vertauschen der Spalten, in der Reihenfolge S3,S1,S2}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & t & \frac{14}{3} \\ -2 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & 8 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ Z2\text{-}2Z1 \\ Z3+Z1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & t & \frac{14}{3} \\ 0 & .-4 & -1-2t & -\frac{13}{3} \\ 1 & 8 & 8+t & \frac{26}{3} \end{array}\right) Z3+2Z2 \quad \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} -1 & 3 & t & \frac{14}{3} \\ 0 & .-4 & -1-2t & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 6-3t & 0 \end{array}\right).$$

Das Gleichungssystem ist nur dann lösbar, falls gilt: $rg(A) = rg(A|\vec{b})$.

Weiterhin gilt: dim(Lösungsraum) = n - rg(A) , wobei n die Anzahl der Unbekannten ist, also n=3.
Der Lösungsraum soll eine Gerade sein, d.h., die Dimension des Lösungsraumes muss 1 sein.
Da $n = 3$ folgt aus der Bedingung 1 = 3 - rg(A) dass $rg(A) = rg(A|\vec{b}) = 2$ sein muss.
Deshalb muss in der obigen Dreiecksmatrix 6-3t = 0 sein. D.h., es ist

$$6-3t = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

Die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Systems hat also die Dimension 1 für t=2.

<u>Berechnen der Lösung des Gleichungssystems:</u>

Einsetzen von $t = 2$ (in obige Matrix) und Berücksichtigung der obigen Vertauschung der Spalten (Die Koeffizienten in Spalte 1 gehören zu x3, in Spalte 2 zu x1 und in Spalte 3 zu x2):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & \frac{14}{3} \\ 0 & .-4 & -5 & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{rrrcl} -x_3 & +3x_1 & +2x_2 & = & \frac{14}{3} \\ & -4x_1 & -5x_2 & = & -\frac{13}{3} \end{array}$$

$$-4x_1 = -\frac{13}{3} + 5x_2 \Leftrightarrow x_1 = \frac{13}{12} - \frac{5}{4}x_2$$

Prof.Dr.B.Grabowski e-mail: grabowski@htw-saarland.de Tel.: 5867-424
Lösungen zu Übung 11

$$x_3 = -\frac{14}{3} + 3(\frac{13}{12} - \frac{5}{4}x_2) + 2x_2 \Leftrightarrow x_3 = -\frac{17}{12} - \frac{7}{4}x_2$$

Die Lösungsmenge unseres inhomogenen Gleichungssystems ist also für t=2:

$$L=\left\{ P=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in R^3 \middle| P = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ -17 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} -5/4 \\ 1 \\ -7/4 \end{pmatrix}, a \in R \right\}$$

Zu Aufgabe 5

$$ax_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + ax_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + x_2 + ax_3 = 1$$

Für welche $a \in$ R ist dieses GS

a) eindeutig
b) mehrdeutig
e) nicht lösbar?
d) Geben Sie im Falle der eindeutigen Lösbarkeit die Lösung an!

Lösung:
Das Gleichungssystem

$$ax_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + ax_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + x_2 + ax_3 = 1$$

ist äquivalent zur Matrix $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$, auf die wir den Gausschen Algorithmus anwenden.

Gausscher Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{\text{Vertauschen} \\ \text{derSpalten} \\ 1\,\text{und}\,3}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ Z2 - Z1 \rightarrow \\ Z3 - aZ1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ Z3 + Z2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-a \end{array}\right)$$

Lösbarkeitsbedingungen:

Zu a) eindeutig lösbar, falls rg(A) = rg(A| $\vec{b}$) = 3, also falls det(A)≠0. Dazu müssen alle Diagonalelemente der Matrix ≠0 sein.

Prof.Dr.B.Grabowski e-mail: grabowski@htw-saarland.de Tel.: 5867-424
Lösungen zu Übung 11

D.h., eindeutig lösbar $\Leftrightarrow$ $a-1 \neq 0 \wedge -a^2-a+2 \neq 0$.
Die Lösung der Gleichung $-a^2-a+2 = 0$ ergibt: $a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow$

$$a_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

D.h., das GS ist eindeutig lösbar, falls gilt: a ÷ 1 ė $a \neq -2$

Zu b) und c)
Wir untersuchen nun die anderen Fälle:

Fall a=1:

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-a \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Fall a=-2:

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-a \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

<u>**Zu b)**</u>
Mehrdeutig lösbar, falls $rg(A) = rg(A|\vec{b}\,) < 3$.
Für a=1 ist rg(A) = rg(A|$\vec{b}$) =1< 3, d.h. das GS ist für a = 1 mehrdeutig lösbar!

<u>**Zu c)**</u>
Das GS ist nicht lösbar, falls gilt: $rg(A) \neq rg(A|\vec{b}\,)$.
Für a=-2 ist rg(A) =2 und rg(A|$\vec{b}$) =3, d.h. das GS ist für a = -2 nicht lösbar!

<u>**Zu d)**</u>
Die Lösung des GS im Fall der eindeutigen Lösbarkeit berechnen wir mittels GA:

Wir lösen das GS $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-a \end{pmatrix}$ von unten nach oben auf und erhalten:

$$x_3 = \frac{1-a}{2-a-a^2} = \frac{1-a}{(a+2)(1-a)} = \frac{1}{a+2}$$

Prof.Dr.B.Grabowski e-mail: grabowski@htw-saarland.de Tel.: 5867-424
Lösungen zu Übung 11

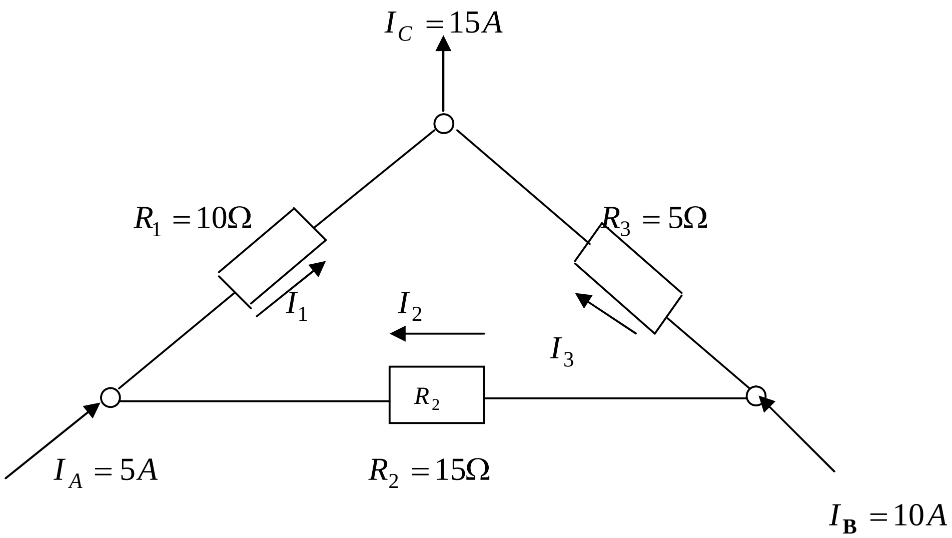
$$(a-1)x_2 + (1-a)x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{a+2}$$

$$x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{a+2}$$

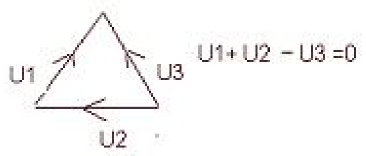
Anwendungen

Zu Aufgabe 6

Berechnen Sie die Teilströme I_1, I_2, I_3 in folgender Masche:



Hinweis:
Verwenden Sie die Kirchhoff'schen Gesetze (Maschenregel und Knotenregel) und stellen Sie zunächst alle in dieser Masche geltenden Gleichungen für I_1, I_2, I_3 auf! Lösen Sie anschließend das GS mit dem Gausschen Algorithmus!
Maschenregel: Die Summe der Spannungen in einer Masche ist gleich 0
(Beachten Sie, dass U=IR ist und beachten Sie die Richtung des Spannungsabfalls!)



Knotenregel: Die Summe der in einen Knoten hineinfließenden Ströme ist gleich der Summe der aus dem Knoten herausfließenden Ströme.

Prof.Dr.B.Grabowski e-mail: grabowski@htw-saarland.de Tel.: 5867-424
Lösungen zu Übung 11

Lösung:
Wir erhalten aus der Skizze folgendes Gleichungssystem:

$(1) U_1 + U_2 - U_3 = 0$ *Maschenregel*

$(2) I_2 + I_A = I_1$ *Knotenregel*

$(3) I_B = I_2 + I_3$ ""

$(4) I_1 + I_3 = I_C$ ""

$(5) U_i = RI_i$ *Ohmsches Gesetz*

Setzen wir (5) in (1) ein und berücksichtigen wir die in der Skizze gegebenen Werte für Ströme und Wiederstände, so erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} (1') & 10I_1 + 15I_2 - 5I_3 = 0 \\ (2') & I_1 - I_2 = 5 \\ (3') & I_2 + I_3 = 10 \\ (4') & I_1 + I_3 = 15 \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 & 15 & -5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{I} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Mittels Gaus'schem Algorithmus diagonalisieren wir das GS:

$$(A \mid \vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 15 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right) \begin{array}{l} Z1 <-> Z2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 10 & 15 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ Z2 - 10Z1 \\ \\ Z4 - Z1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 25 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ Z3 <-> Z2 \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 25 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ Z3 - 25Z2 \\ Z4 - Z2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -30 & -250 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir erhalten also folgendes zu (1') bis (4') äquivalentes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcl} I_1 - I_2 & & = 5 \\ I_2 & + & I_3 = 10 \\ & & -30I_3 = -250 \end{array}$$

Wir lösen es von unten nach oben auf und erhalten:
$I_3 = 25/3 = 8{,}333$ A
$I_2 = 5/3 = 1{,}67$ A
$I_1 = 20/3 = 6{,}67$ A

Prof.Dr.B.Grabowski e-mail: grabowski@htw-saarland.de Tel.: 5867-424
Lösungen zu Übung 11

Zu Aufgabe 7

Durch folgende 4 Messpunkte (x_i,y_i), i=1,...,4 geht genau ein Polynom 3. Grades

y= $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

xi	-1	0	1	2
yi	0	1	0	1

Bestimmen Sie die Koeffizienten a-d dieses Polynoms, indem Sie zunächst ein Gleichungssystem aufstellen und dieses dann mittels Gausschem Algorithmus oder der Cramerschen Regel lösen!

Lösung:

Aus der Beziehung $y_i = ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d$, die für jeden der 4 Punkte (xi,yi) gelten muss, erhalten wir das Gleichungssystem:

$$A \cdot \vec{v} = \vec{y}$$

$$\text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

Wir lösen es durch Anwendung des Gausschen Algorithmus:

$$(A \mid \vec{y}) = \left(\begin{array}{cccc:c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ Z3 + Z1 \\ Z4 + 8Z1 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc:c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & -6 & 9 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ Z4 - 6Z3 \end{array},$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc:c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \text{an letzte Stelle} \\ \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc:c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem $A \cdot \vec{v} = \vec{y}$ ist folglich äquivalent zu:

$$\begin{array}{rrrrl} -a & + b & - c & + d & = 0 \\ & 2b & & + 2d & = 0 \\ & & -6c & - 3d & = 1 \\ & & & d & = 1 \end{array}$$

Wir lösen es von unten nach oben auf und erhalten:

d = 1 c = - 2/3 b = -1 a = 2/3

Prof.Dr.B.Grabowski e-mail: grabowski@htw-saarland.de Tel.: 5867-424

Unser Polynom lautet also:

y=$\frac{2}{3}x^3 - x^2 - \frac{2}{3}x + 1$.