MST	Lösung zu Üb8 Mathematik I Prof. Dr.B.Grabowski Vektorräume, affine Räume, Basen, EZS, Lineare Unabhängigkeit

Zu Aufgabe 1

- **a)** Geben Sie 2 linear unabhängige Vektoren im R^3 an!
- **b)** Geben Sie 3 linear unabhängige Vektoren im R^3 an!
- **c)** Geben Sie 3 linear abhängige Vektoren im R^3 an!
- **d)** Geben Sie 4 linear abhängige Vektoren im R^3 an!

Lösung: Die Lösungen sind nicht eindeutig.
Mögliche Lösungen sind:

Zu a) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ **Zu b)** $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Zu c) $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$ (Der 3. Ist die Resultierende der beiden ersten Vektoren)

Zu d) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ (4 Vektoren im R^3 sind immer linear abhängig!)

Zu Aufgabe 2

Untersuchen Sie, ob folgende Vektoren linear unabhängig sind:

a) $\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/2\\1\\3/2\end{pmatrix}$ c) $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{a}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{a}_3=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{a}_4=\begin{pmatrix}3\\6\\1\\4\end{pmatrix}$

Lösung:

Zu a) Für das Spatprodukt gilt:

$[\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}]=0$. D.h., die 3 Vektoren liegen in einer Ebene. D.h., sie sind nicht linear unabhängig!

Zu b) Für das Kreuzprodukt gilt: $\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}-1/2\\1\\3/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\0\\2\end{pmatrix}\neq\vec{0}$. Demzufolge sind die beiden Vektoren nicht parallel, d.h., sie sind linear unabhängig!

Zu c)

Es gilt: $a_1\vec{a}_1+ a_2\vec{a}_2+ a_3\vec{a}_3+ a_4\vec{a}_4=\vec{0}$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}2\\2\\-1\\0\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}3\\6\\1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcrcrl} \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & 2\alpha_3 & + & 3\alpha_4 & = & 0 & (1)\\ & & 2\alpha_2 & + & 2\alpha_3 & + & 6\alpha_4 & = & 0 & (2)\\ & & & - & \alpha_3 & + & \alpha_4 & = & 0 & (3)\\ & & & & & & 4\alpha_4 & = & 0 & (4) \end{array}$$

Dieses diagonalförmige Gleichungssystem können wir schrittweise von unten (4) nach oben (1) lösen, es ergibt sich als einzige Lösung:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0.$$

Folglich gilt:

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3 + \alpha_4\vec{a}_4 = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0.$$

Demzufolge sind die 4 Vektoren unter c) linear unabhängig!

Zu d)
Was könne Sie aus c) ableiten? Welche Gestalt müssen k Vektoren der Länge k haben, damit sie mit Sicherheit linear unabhängig sind?

Lösung:

Diagonalgestalt, d.h. der 1. Vektor hat Komponenten, die alle bis auf die erste gleich 0 sind und jeder weitere Vektor hat eine 0 weniger als Komponente als der vorherige Vektor.

Zu Aufgabe 3

3 Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sind linear unabhängig, falls gilt:

„aus $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 = \vec{0}$ folgt: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ “.

Seien $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 3 linear unabhängige Vektoren. Seien $\vec{b}_1 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$, $\vec{b}_2 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_3$, $\vec{b}_3 = \vec{a}_2 + \vec{a}_3$.

Untersuchen Sie unter Verwendung der obigen Definition der linearen Unabhängigkeit, ob $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ linear unabhängig sind!

Lösung:

$$\alpha_1\vec{b}_1 + \alpha_2\vec{b}_2 + \alpha_3\vec{b}_3 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \alpha_1(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) + \alpha_2(2\vec{a}_1 - \vec{a}_3) + \alpha_3(\vec{a}_2 + \vec{a}_3) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (\alpha_1 + 2\alpha_2)\vec{a}_1 + (\alpha_1 + \alpha_3)\vec{a}_2 + (\alpha_3 - \alpha_2)\vec{a}_3 = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ Wegen der Linearen Unabhängigkeit von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ muss gelten:

$$a_1 + 2a_2 = 0$$
$$a_1 + a_3 = 0$$
$$a_3 - a_2 = 0$$

Wir lösen das GS schrittweise auf und erhalten dann $a_1 = a_2 = a_3 = 0$

D.h., $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ sind linear unabhängig.

Zu Aufgabe 4

- **a)** Geben Sie eine Basis im R^3 an!
- **b)** Geben Sie eine Basis im R^4 an!
- **c)** Geben Sie mindestens 2 Erzeugendensysteme des R^3 an, die keine Basis sind!

Lösungen: Die Lösungen sind nicht eindeutig!

Zu a) **Z.B.** $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

zu b) Z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

zu c) Z.B $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **und** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(4 Vektoren im R^3 sind immer linear abhängig!)

Zu Aufgabe 5

Welche der 4 Mengen von Vektoren bilden keine Basis im R^3? (Begründung!)

$$M0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad M1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\},$$

$$M2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}, \qquad M3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}.$$

Lösung:

M0 keine Basis, da kein EZS (dazu werden mindestens 3 Vektoren benötigt!)
M1 keine Basis, da di 3 Vektoren linear abhängig sind (Spatprodukt = 0)
M2 ist eine Basis!
M3 keine Basis, da 4 Vektoren im R^3 immer linear abhängig sind!

Zu Aufgabe 6

a) Geben Sie einen konkreten affinen Raum der Dimension 1 im R^3 an!
b) Geben Sie einen konkreten affinen Raum der Dimension 2 im R^3 an!
c) Geben Sie einen konkreten affinen Raum der Dimension 3 im R^3 an!

Lösung:

Die Lösungen sind nicht eindeutig. Wir haben hier z.B. folgende Lösungen:

Zu a)
Z.B. eine bestimmte Gerade im R^3: (Alle Additionen von Punkt und Vektor, Vektor und Vektor und die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar sind komponentenweise definiert)

$$A = \left\{ P \mid P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{ª} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ª} \in R \right\}$$

Zu b)
Z.B. eine bestimmte Ebene im R^3: (Alle Additionen von Punkt und Vektor, Vektor und Vektor und die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar sind komponentenweise definiert)

$$A = \left\{ P \mid P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{ª} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{«} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ª} \in R, \text{«} \in R \right\}$$

Zu c)
Die Menge aller Punkte i m R^3: (Alle Additionen von Punkt und Vektor, Vektor und Vektor und die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar sind komponentenweise definiert)

$$A = \left\{ P \mid P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{ª} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{«} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{¥} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ª} \in R, \text{«} \in R, \text{¥} \in R \right\}$$

MST	Lösung zu Üb8 Mathematik I Prof. Dr.B.Grabowski Vektorräume, affine Räume, Basen, EZS, Lineare Unabhängigkeit

Zu Aufgabe 7

Welche der folgenden Mengen ist ein Vektorraum (VR), welche ein affiner Raum (AR) und welche weder noch (Begründung)? Wenn es sich um einen VR oder AR handelt, so geben Sie die Dimension des Raumes, die Basis und ggf. den Aufpunkt an!

a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} \mid \quad t \in R \right\}$ b) $M = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} \mid \quad t \in R \right\}$ c) $M = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} \mid \quad t > 0 \right\}$

Lösung:

Zu a) Es ist:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} \mid \quad t \in R \right\} = \left\{ \vec{v} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in R \right\}.$$

Damit ist M ein Vektorraum der Dimension 1.

Zu b) Es ist:

$$M = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} \mid \quad t \in R \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in R \right\}.$$

Damit ist M ein affiner Raum der Dimension 1 (eine Gerade).

Zu c)

$$M = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} \mid \quad t > 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, t > 0 \right\}$$

D.h., M ist kein Vektorraum, weil der Nullvektor nicht in M ist.
M ist aber auch kein affiner Raum, weil die Menge der Vektoren, die zum Aufpunkt (3,0,0) addiert werden, kein Vektorraum ist!

Zu Aufgabe 8

Wir betrachten Funktionen mit den reellen Zahlen als Definitionsbereich. Die Operationen + (Addition zweier Funktionen) und · (Multiplikation einer Funktion mit einem Skalar) seien wie folgt definiert:

$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ für alle $x \in R$
$(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$ für alle $x \in R$

Auf der Basis dieser beiden Operatoren betrachten wir den Vektorraum V aller Schwingungen der Frequenz 1:

$$V = \{ f : x \in R \rightarrow f(x) \in R \mid \quad f(x) = \sim \sin(x) + \quad \cos(x), \sim \in R, \quad \in R \}$$

a) Zeigen Sie, dass die beiden Funktionen $f_1(x) = \sin(x)$, $f_2(x) = \cos(x)$ linear unabhängig sind, also eine Basis im Vektorraum (V, + , ·) bilden!

b) Wie groß ist die Dimension von V?

c) Zeigen Sie: zwei Schwingungen $g1(x) = \sim_1 \sin(x) + {}_1 \cos(x)$ und $g2(x) = \sim_2 \sin(x) + {}_2 \cos(x)$, x ∈R sind identisch für alle x ∈R , falls die Koeffizienten übereinstimmen, d.h. falls gilt : $\sim_1 = \sim_2$ und ${}_1 = {}_2$.

Lösung:

Zu a)
Sei $\sim \sin(x) + \cos(x) = 0$ für alle x∈R.
Dann gilt diese Gleichung auch speziell für x = 0 und für x=π/2:

$$\begin{aligned} \sim \sin(0) \quad + \quad \cos(0) \quad &= 0 \\ \sim \sin(® / 2) + \quad \cos(® / 2) &= 0 \end{aligned}$$

⇒ (weil sin(0)=0, cos(0)=1, sin(π/2) = 0, cos(π/2)=0 folgt:

$$\begin{aligned} &= 0 \\ \sim \; &= 0 \end{aligned}$$

Demzufolge sind die beiden Funktionen sin(x) und cos(x) linear unabhängig!

Zu b)
dim(V) = 2

Zu c)

Es gilt:

$$\begin{aligned} & g1(x) = g2(x) \quad \forall x \in R \\ \Leftrightarrow \; & \sim_1 \sin(x) + {}_1 \cos(x) = \sim_2 \sin(x) + {}_2 \cos(x) \quad \forall x \in R \\ \Leftrightarrow \; & (\sim_1 - \sim_2) \sin(x) + ({}_1 - {}_2) \cos(x) = 0 \quad \forall x \in R \end{aligned}$$

Weil sin(x) und cos(x) linear unabhängig sind folgt daraus:

$$\begin{aligned} \sim_1 - \sim_2 &= 0 \\ {}_1 - {}_2 &= 0 \end{aligned}$$

und folglich ist:

$$\begin{aligned} \sim_1 &= \sim_2 \\ {}_1 &= {}_2 \end{aligned}$$

Zu Aufgabe 9
Wir betrachten Funktionen mit den reellen Zahlen als Definitionsbereich. Die Operationen + (Addition zweier Funktionen) und · (Multiplikation einer Funktion mit einem Skalar) seien wie folgt definiert:

(f+g)(x) := f(x) + g(x) für alle x ∈R
(λ·f)(x) := λ·f(x) für alle x∈R

Auf der Basis dieser beiden Operatoren betrachten wir den Vektorraum V aller Polynome bis zur Ordnung 3
$V = \{ f : x \in R \to f(x) \in R \mid \quad f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a,b,c,d \in R \}$

a) Zeigen Sie, dass die 4 Funktionen $f_1(x) = x^3, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = x, \quad f_4(x) = 1$
linear unabhängig sind, also eine Basis im Vektorraum (V, + , ·) bilden!

b) Wie groß ist die Dimension von V?

c) Zeigen Sie: zwei Polynome $p_1(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1, \quad p_2(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2,$
bis zur Ordnung 3 sind identisch für alle x ∈R , falls die Koeffizienten übereinstimmen, d.h. falls gilt :
$a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, d_1 = d_2$.

Lösung:

Zu a)
Sei:

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) + \alpha_4 f_4(x) = 0 \qquad \forall x \in R$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x + \alpha_4 = 0 \qquad \forall x \in R$$

Diese Gleichung gilt dann auch für 4 verschiedene spezielle x-Werte:

z.B. x=0, x=1, x=-1, x=2:

$$\Rightarrow \begin{array}{rcrcrcrcl} & & & & & & \alpha_4 & = & 0 \\ \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & + & \alpha_4 & = & 0 \\ -\alpha_1 & + & \alpha_2 & - & \alpha_3 & + & \alpha_4 & = & 0 \\ 8\alpha_1 & + & 4\alpha_2 & + & 2\alpha_3 & + & \alpha_4 & = & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_4 = 0 \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcrcrl} \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = 0 \\ -\alpha_1 & + & \alpha_2 & - & \alpha_3 & = 0 \\ 8\alpha_1 & + & 4\alpha_2 & + & 2\alpha_3 & = 0 \end{array}$$

Das Gleichungssytem mit den 3 Gleichungen und 3 Unbekannten lösen wir wieder durch den Gausschen Algorithmus(siehe Lösung zu 3c):

1.Schritt:
Wir lassen die 1. Zeile unverändert
Wir addieren zur 2. Zeile 1 mal die 1. Zeile
Wir subtrahieren von der 3. Zeile 8 mal die 1. Zeile.

Ergebnis:

$$\begin{array}{rcrcrl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = 0 \\ -\lambda_1 & + & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = 0 \\ 8\lambda_1 & + & 4\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = 0 \end{array} \quad <=> \quad \begin{array}{rcrcrl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = 0 \\ & & 2\lambda_2 & & & = 0 \\ & & -4\lambda_2 & & -6\lambda_3 & = 0 \end{array}$$

Aus der 2. Zeile folgt sofort: $a_2 = 0$, aus der 3. Zeile folgt dann $a_3 = 0$ und aus der 1. Zeile $a_1 = 0$.

Demzufolge sind die 4 Funktionen $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x$, $f_4(x) = 1$ linear unabhängig.

Zu b)

dim(V) = 4

Zu c)
Es gilt:

$$\begin{array}{ll} p_1(x) = p_2(x) & \forall x \in R \\ \Leftrightarrow \quad a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2 & \forall x \in R \\ \Leftrightarrow \quad (a_1 - a_2)x^3 + (b_1 - b_2)x^2 + (c_1 - c_2)x + (d_1 - d_2) = 0 & \forall x \in R \end{array}$$

Wegen der Linearen Unabhängigkeit von $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x$, $f_4(x) = 1$ folgt daraus:

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 &= 0 \\ b_1 - b_2 &= 0 \\ c_1 - c_2 &= 0 \\ d_1 - d_2 &= 0 \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 \\ b_1 &= b_2 \\ c_1 &= c_2 \\ d_1 &= d_2 \end{aligned}$$