

Matrizenoperationen

Zu Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Transponierten folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = (1 \quad 4 \quad 1) \quad C = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Welche dieser Matrizen sind symmetrisch?

Lösung:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 7 & 9 & 3 \end{pmatrix},$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C^T = (8 \quad 4 \quad 5 \quad 1), \quad D^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad E^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nur E ist symmetrisch.

Zu Aufgabe 2

a) $x = 1/16, y = 5/8$

b) $x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{15}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}}{16} = \frac{10}{16}$

Zu Aufgabe 3

Gegeben seien folgende Messdatenpaare: (2,3) und (5,1).

Geben Sie die Gerade $y=ax+b$ an, die durch die beiden Punkte verläuft, indem Sie

Zu a) Gleichungssystem (GS):

Es ist $y = ax + b$, demzufolge erfüllen die beiden Messdatenpaare das GS:

$$3 = 2a + b$$

$$1 = 5a + b$$

In Matrixschreibweise lautet das GS: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zu b) Lösung mittels Cramerscher Regel:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3-1}{2-5} = -\frac{2}{3} \quad \text{und} \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2-15}{2-5} = \frac{13}{3}$$

Die Gerade lautet also $y = -2/3 x + 13/3$.

Zu Aufgabe 4

Berechnen Sie die Lösung z des folgenden Gleichungssystems mittels Cramerscher Regel:

$$2x + 3y - z = 2$$

$$-4x + 2y + 2z = 1$$

$$x - y - 2z = -1$$

Lösung: Nach CR ist

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-4+3+8-(4-2+12)}{-8-4+6-(-2-4+24)} = \frac{7-14}{-6-18} = \frac{7}{24}$$

(Die Determinanten sind das Spatprodukt der 3 Zeilenvektoren und werden mit der Sarusschen Regel berechnet).

Zu Aufgabe 5

Durch folgende 3 Messpunkte (x_i, y_i) , $i=1, \dots, 4$ geht genau ein Polynom 2. Grades

$$y = ax^2 + bx + c.$$

x_i	-1	0	2
y_i	0	1	1

Bestimmen Sie die Koeffizienten a-c dieses Polynoms, indem Sie zunächst ein Gleichungssystem aufstellen und dieses dann mittels der Cramerschen Regel lösen!

Lösung:

Aus der Beziehung $y_i = ax_i^2 + bx_i + c$, die für jeden der 3 Punkte (x_i, y_i) gelten muss, erhalten wir das Gleichungssystem:

$$A \cdot \vec{v} = \vec{y}$$

mit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Wir lösen es durch Anwendung der Cramerschen Regel:

Es ist

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0 + 2 - 1 - (0 + 0 - 1)}{0 + 0 - 4 - (0 + 2 + 0)} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1 + 0 + 0 - (4 + 1 + 0)}{-6} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0 + 0 - 4 - (0 + 0 + 2)}{-6} = \frac{-6}{-6} = 1$$

Das Polynom lautet folglich: $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$.

Zu Aufgabe 6

Seien $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Matrix $C = (2A - 3B)^T$

Lösung:

Es ist:

$$(2A - 3B)^T = \left(\begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 9 & 3 \\ 3 & 12 & 9 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -1 & -8 & -7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & -8 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

Zu Aufgabe 7

Multiplizieren Sie jeweils die Matrizen A und B miteinander, sofern dies möglich ist! Begründen Sie ggf., warum die Matrizenmultiplikation nicht möglich ist!

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 43 \\ 11 \\ 23 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{d) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Zu a) und zu b) Produkt AB ist nicht definiert, da Spaltenanzahl von $A \neq$ Zeilenanzahl von B und das Produkt BA ist nicht definiert, da Spaltenanzahl von $B \neq$ Zeilenanzahl von A ist.

$$\text{Zu c) } A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 & 4 \cdot 3 & 4 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 3 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 9 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B \cdot A = 13$$

$$\text{Zu d) } A \cdot B = 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 12 \quad \text{und} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Zu e) } A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = B$$

und analog: $B \cdot A = B$.

Zu Aufgabe 8

Seien $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

- Berechnen Sie die Matrix $C = A^T \cdot B$ und $D = B^T \cdot A$.
Wie hängen C und D miteinander zusammen?
- Berechnen Sie die Matrix $F = (2A - 3B)^T \cdot B$
- Berechnen Sie die Matrix C für die gilt: $B \cdot B^T \cdot C = E_2$

Lösung:**Zu a)**

Es ist $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ und folglich $C = A^T \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 5 \\ 2 & 15 & 9 \\ 1 & 10 & 5 \end{pmatrix}$.

Es ist $B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ und folglich ist $D = B^T \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 10 & 15 & 10 \\ 5 & 9 & 5 \end{pmatrix}$.

Offensichtlich gilt:

$$C^T = D \quad \text{bzw.} \quad (A^T \cdot B)^T = B^T \cdot A$$

Zu b)

Es ist:

$$(2A - 3B)^T = \left(\begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 9 & 3 \\ 3 & 12 & 9 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -1 & -8 & -7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & -8 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

und folglich:

$$F = (2A - 3B)^T \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & -8 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 1 \\ -8 & -41 & -27 \\ -7 & -25 & -20 \end{pmatrix}$$

Zu c)

Die Lösung C von $B \cdot B^T \cdot C = E_2$ ist $C = (B \cdot B^T)^{-1}$.

Wir erhalten

$$B \cdot B^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 15 & 26 \end{pmatrix}$$

Probe : Stimmt.

$$\text{und folglich ist } C = (B \cdot B^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 26 & -15 \\ -15 & 10 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{26 \cdot 10 - 15^2} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 26 & -15 \\ -15 & 10 \end{pmatrix}.$$

Zu Aufgabe 9

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/16 \\ 10/16 \end{pmatrix}$$

Probe: Stimmt.