HTW	Lösungen zu Übung 7 MST Mathematik I VR, LK's, Lineare Hüllen und EZS Prof. Dr.B.Grabowski

Zu Aufgabe 1

Zu a) Geben Sie die Menge V aller Vektoren im R^3 an, die parallel zu Ebenen mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ verlaufen!

<u>Lösung:</u>

V enthält offensichtlich alle Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$, die senkrecht auf dem Normalenvektor

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ stehen, also die Gleichung

$\vec{v} \cdot \vec{n} = v_x - v_y + v_z = 0 \quad (1)$

erfüllen.

Legen wir 2 Komponenten z.B. v_x und v_y beliebig fest, so ergibt sich daraus die dritte:

$v_x = \lambda$

$v_y = \mu$

$\rightarrow \quad v_z = -\lambda + \mu$

Daraus ergibt sich: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ª} \\ \text{«} \\ -\text{ª} + \text{«} \end{pmatrix} = \text{ª}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \text{«}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

$$V = \left\{ \vec{v} \in R^3 \mid \vec{v} = \text{ª}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \text{«}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ª}, \text{«} \in R \right\}.$$

Zu b) Geben Sie mindestens 2 verschiedene Erzeugendensysteme (EZS) von V an! Wie groß muss die Anzahl der Erzeugendenvektoren von V wohl mindestens sein?

Lösung:

Die Lösung ist nicht eindeutig, z.B. ist E1= $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ EZS von V.

Aber auch E2= $\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ ist EZS von V (Erhalten wir, indem wir in (1) $v_z = \lambda$ und $v_y=\mu$ setzen ($\rightarrow$ $v_x= - \lambda + \mu$).

Es sind mindestens 2 nichtparallele Vektoren für die Erzeugung von V notwendig .

Zu Aufgabe 2
Welche der folgenden Mengen V von Vektoren ist kein Vektorraum? Geben Sie die Begründung dafür an!
Geben Sie im Falle, dass es sich bei V um einen Vektorraum (Unterraum des R^3) handelt, V als Lineare Hülle eines ERZ an, das heißt, geben Sie das EZS an und stellen Sie V als Menge aller LK’s dar, die durch das EZS gebildet werden können!

Lösung:

a) $$V=\left\{\vec v \mid \vec v = \begin{pmatrix}t+2« +1\\ « \\ 0\end{pmatrix},\quad t, « \in R\right\}$$

$$=\left\{\vec v \mid \vec v = (t+1)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + «\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\quad t, « \in R\right\} = \left\{\vec v \mid \vec v = ª\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + «\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\quad ª(=t+1), « \in R\right\}$$

Damit ist V die Lineare Hülle des EZS $=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ und ist – weil Lineare Hüllen Vektorräume sind, ein Vektorraum.

b) $V=\{\vec 0\}$ ist ein Vektorraum (VR), weil V alle Eigenschaften des VR erfüllt!

(V heißt trivialer VR)

c) $$V=\left\{\vec v \mid \vec v = \begin{pmatrix}t+2« +1\\ « \\ 1+t\end{pmatrix},\quad t, « \in R\right\}$$

$$=\left\{\vec v \mid \vec v = (t+1)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + «\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\quad t, « \in R\right\} = \left\{\vec v \mid \vec v = ª\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + «\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\quad ª(=t+1), « \in R\right\}$$

Damit ist V die Lineare Hülle des EZS $=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ und ist – weil Lineare Hüllen Vektorräume sind, ein Vektorraum.

d) $\mathrm{V}=\left\{\vec{v}\mid\vec{v}=\begin{pmatrix}t+2\text{«}+1\\\text{«}\\2+t\end{pmatrix},\quad t,\text{«}\in R\right\}$

$$=\left\{\vec{v}\mid\vec{v}=(t+1)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\text{«}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad t,\text{«}\in R\right\}=\left\{\vec{v}\mid\vec{v}=\text{ª}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\text{«}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad \text{ª}(=t+1),\text{«}\in R\right\}$$

Ist keine Lineare Hülle. V ist kein Vektorraum, z.B. ist der 0-Vektor nicht in V enthalten!

e) $\mathrm{V}=\left\{\vec{v}\mid\vec{v}=\begin{pmatrix}t+2\text{«}+1\\2\text{«}-1\\2+t\end{pmatrix},\quad t,\text{«}\in R\right\}$

$$=\left\{\vec{v}\mid\vec{v}=(t+2)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+(2\text{«}-1)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad t,\text{«}\in R\right\}$$

$$=\left\{\vec{v}\mid\vec{v}=\text{ª}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\text{¥}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \text{ª}(=t+1),\text{¥}(=2\text{«}-1)\in R\right\}$$

Damit ist V die Lineare Hülle des EZS $=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ und ist – weil Lineare Hüllen Vektorräume sind, ein Vektorraum.

f) $\mathrm{V}=\left\{\vec{v}\mid\vec{v}=\begin{pmatrix}t+2\text{«}+1\\\text{«}\\0\end{pmatrix},\quad t,\text{«}\in R^{\geq 0}\right\}$

Ist keine Linerae Hülle und auch kein VR. Enthält z.B. den Vektor $\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}$ (Für t = μ=1) aber nicht den Gegenvektor dazu.

Zu Aufgabe 3

Zu a) Auf welche Weise kann $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ aus $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{a_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als LK erzeugt werden?

Lösung: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 4\vec{a_1} - 2\vec{a_2}$.

Zu b) Auf welche Weise kann $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ aus $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{a_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als LK erzeugt werden?

Lösung:
Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{rcll} 4 & = & \lambda_1 & \\ -2 & = & \lambda_1 & +\lambda_2 \end{array} \Longrightarrow \lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = -6$.

$\Longrightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 4\vec{a_1} - 6\vec{a_2}$.

Zu c) Auf welche Weise kann $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ aus $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{a_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als LK erzeugt werden?

Lösung:
Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{rclll} 4 & = & \lambda_1 & +\lambda_2 & \\ -2 & = & \lambda_1 & & +\lambda_3 \end{array}$

Wir stellen die erste Gleichung nach λ_2 und die zweite Gleichung nach λ_3 um und erhalten:

$$\begin{array}{rcl} \lambda_2 & = & 4 - \lambda_1 \\ \lambda_3 & = & -2 - \lambda_1 \end{array}$$

Wir können λ_1 beliebig festlegen und erhalten damit unendlich viele Lösungen dieses Systems von zwei Gleichungen. Z.B. erhalten wir für $\lambda_1 = 0$ die Werte $\lambda_2 = 4$ und $\lambda_3 = -2$.

Es gibt folglich unendlich viele Möglichkeiten zur Darstellung von $\vec{v}$, eine davon ist:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 4\vec{a_2} - 2\vec{a_3}.$$

Zu Aufgabe 4

Zu a)

Geben Sie eine LK der Vektoren $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ an, aus der sich der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$ erzeugen lässt!

Lösung:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist nach l_1, l_2, l_3 aufzulösen:

$$\begin{aligned} -4 &= -a_1 + a_2 && (1) \\ 10 &= a_1 + 2a_3 && (2) \\ 8 &= a_1 - a_2 + a_3 && (3) \end{aligned}$$

(1) nach l_2 und (2) nach l_3 umstellen ergibt:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 - 4 && (1') \\ a_3 &= 5 - \frac{a_1}{2} && (2') \end{aligned}$$

(1') und (2') in (3) eingesetzt ergibt:

$$8 = a_1 - a_1 + 4 + 5 - \frac{a_1}{2} \Leftrightarrow 8 = 9 - a_1 / 2 \Leftrightarrow a_1 = 2$$

Dieses Ergebnis wieder in (1') und (2') eingesetzt ergibt: $\begin{aligned} a_2 &= -2 \\ a_3 &= 4 \end{aligned}$

Damit ergibt sich das Ergebnis:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zu b) Stellen Sie den Nullvektor als nichttriviale LK der 4 in a) gegebenen Vektoren dar!

!

Lösung: $\vec{0} = -\begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

HTW	Lösungen zu Übung 7 MST Mathematik I VR, LK's, Lineare Hüllen und EZS Prof. Dr.B.Grabowski

Zu Aufgabe 5

a) Prüfen Sie, auf welche Weisen (nur trivial oder auch nichtrivial) Sie den Nullvektor $\vec{0}$ als LK der folgenden Vektormengen erzeugen können, geben Sie die jeweiligen LK' s an:

Zu a1) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$:

$$\vec{0} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{llll} 0 = & a_1 & & + a_3 & (1) \\ 0 = & 2a_1 & + a_2 & & (2) \\ 0 = & a_1 & + a_2 & + a_3 & (3) \end{array}$$

Aus (1) folgt: $a_3 = -a_1$ (1')

Aus (2) folgt: $a_2 = -2a_1$ (2')

(1') und (2') in (3) eigesetzt ergibt: $0 = a_1 - a_1 - 2a_1 = -2a_1 \Leftrightarrow a_1 = 0$

Daraus folgt wiederum wegen (1') und (2'): $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

D.h., der Nullvektor ist im Fall a1) nur auf triviale Weise durch LK erzeugbar:

$$\vec{0} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zu a2) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$:

$$\vec{0} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{llll} 0 = & a_1 & + a_2 & + a_3 & (1) \\ 0 = & 2a_1 & + a_2 & & (2) \\ 0 = & a_1 & + a_2 & + a_3 & (3) \end{array}$$

Aus (1) folgt: $a_3 = -a_1 - a_2$ (1')

Aus (2) folgt: $a_2 = -2a_1$ (2')

(2') in (1') eingesetzt ergibt: $a_3 = -a_1 + 2a_1 = a_1$ (1'')

(1'') und (2') in (3) eigesetzt ergibt: $0 = a_1 - 2a_1 + a_1 = 0$, was uns Nichts neues bringt.

Wir erhalten also:

$a_2 = -2a_1$, $a_3 = a_1$ und λ_1 kann beliebig gewählt werden, z.B. $\lambda_1 = \mu$.

Damit ist der Nullvektor im Fall a2) auch auf nichttriviale Weise darstellbar, es gilt:

$$\vec{0} = \text{«}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} - 2\text{«}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \text{«}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad , \quad \mu\epsilon R \quad \text{beliebig.} \quad (*)$$

Zu b) In welchem der beiden Fälle (a1) oder a2)) kann man einen der 3 Vektoren als LK der beiden anderen darstellen?

Im Falle a2, wenn der Nullvektor auf nicht triviale Weise erzeugbar ist.
Aus (*) folgt:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Zu c) Formulieren Sie einen Zusammenhang zwischen den folgenden beiden Aussagen p und q:

p = 3 beliebige Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in R^3$ (ungleich dem 0-Vektor) liegen nicht in einer Ebene
q = Der Nullvektor lässt sich durch LK der 3 Vektoren nur auf triviale Weise darstellen
(d.h., $\vec{0} = a_1\vec{a}_1 + a_2\vec{a}_2 + a_3\vec{a}_3 \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$)
Begründen Sie diesen Zusammenhang!

Lösung:

Es gilt: p $\Leftrightarrow$ q, d.h.
3 beliebige Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in R^3$ (ungleich dem 0-Vektor) liegen nicht in einer Ebene
$\Leftrightarrow$ Der Nullvektor lässt sich durch LK der 3 Vektoren nur auf triviale Weise darstellen
(d.h., $\vec{0} = a_1\vec{a}_1 + a_2\vec{a}_2 + a_3\vec{a}_3 \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$)

Begründung: Siehe Vorlesung vom 10.12.2013

Zu d) Begründen Sie, warum bei mehr als 3 Vektoren im R^3 (ungleich dem 0-Vektor) stets ein Vektor dabei ist, der sich durch die anderen als LK darstellen lässt!

Begründung: Siehe Vorlesung vom 10.12.2013