HTW	Übung 7 MST Mathematik I
	VR, LK's, Lineare Hüllen und EZS Prof. Dr.B.Grabowski

Aufgabe 1

a) Geben Sie die Menge V aller Vektoren im R^3 an, die parallel zu Ebenen mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ verlaufen!

b) Geben Sie mindestens 2 verschiedene Erzeugendensysteme (EZS) mit jeweils unterschiedlicher Anzahl von Erzeugendenvektoren von V an! Wie groß muss diese Anzahl wohl mindestens sein?

Aufgabe 2

Welche der folgenden Mengen V von Vektoren ist kein Vektorraum? Geben Sie die Begründung dafür an!

Geben Sie im Falle, dass es sich bei V um einen Vektorraum handelt, V als Lineare Hülle eines ERZ an, das heißt, geben Sie das EZS an und stellen Sie V als Menge aller LK's dar, die durch das EZS gebildet werden können!

a) $\mathrm{V} = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = \begin{pmatrix} t + 2« + 1 \\ « \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t, « \in R \right\}$

b) $\mathrm{V} = \{\vec{0}\}$

c) $\mathrm{V} = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = \begin{pmatrix} t + 2« + 1 \\ « \\ 1 + t \end{pmatrix}, \quad t, « \in R \right\}$

d) $\mathrm{V} = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = \begin{pmatrix} t + 2« + 1 \\ « \\ 2 + t \end{pmatrix}, \quad t, « \in R \right\}$

e) $\mathrm{V} = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = \begin{pmatrix} t + 2« + 1 \\ 2« - 1 \\ 2 + t \end{pmatrix}, \quad t, « \in R \right\}$

f) $\mathrm{V} = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = \begin{pmatrix} t + 2« + 1 \\ « \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t, « \in R^{\geq 0} \right\}$

Aufgabe 3

a) Auf welche Weise kann $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ aus $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{a_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als LK erzeugt werden?

b) Auf welche Weise kann $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ aus $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{a_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als LK erzeugt werden?

c) Auf welche Weise kann $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ aus $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{a_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als LK erzeugt werden?

Aufgabe 4

a) Geben Sie eine LK der Vektoren $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ an, aus der sich der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$ erzeugen lässt!

b) Stellen Sie den Nullvektor als nichttriviale LK der 4 in a) gegebenen Vektoren dar!

Aufgabe 5

a) Prüfen Sie, auf welche Weisen (nur trivial oder auch nichttrivial) Sie den Nullvektor $\vec{0}$ als LK der folgenden Vektormengen erzeugen können; geben Sie jeweils alle möglichen LK' s an:

a1) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ a2) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

b) In welchem der beiden Fälle (a1) oder a2)) kann man einen der 3 Vektoren als LK der beiden anderen darstellen?

c) Formulieren Sie einen Zusammenhang zwischen den folgenden beiden Aussagen p und q:

p = 3 beliebige Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in R^3$ (ungleich dem 0-Vektor) liegen nicht in einer Ebene
q = Der Nullvektor lässt sich durch LK der 3 Vektoren nur auf triviale Weise darstellen
(d.h., $\vec{0} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$)
Begründen Sie diesen Zusammenhang!

d) Begründen Sie, warum bei mehr als 3 Vektoren im R^3 (ungleich dem 0-Vektor) stets ein Vektor dabei ist, der sich durch die anderen als LK darstellen lässt!