

Rangbestimmung

Aufgabe 1 Erklären Sie in Worten, was man unter dem Rang einer Matrix versteht!

Aufgabe 2

Geben Sie den Rang der folgenden Matrizen A – E durch „Draufschaun“ an !

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie den Rang folgender Matrizen durch den Gausschen Algorithmus (GA)!:

$$a) A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad b) B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 7 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Untersuchen Sie mittels GA, ob folgende 4 Vektoren linear unabhängig sind!

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5

Welche Dimension besitzt der folgende Vektorraum?

$$V = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 6

- a) Schreiben Sie folgendes lineare GS in Matrixschreibweise!

$$2x_1 + 5x_2 - x_3 = 0$$

$$-x_1 + 8x_2 + 8x_3 - 4x_4 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 - 16x_3 + 10x_4 = 0$$

$$x_2 + x_3 - 4x_4 = 0$$

- b) Offensichtlich ändern die 3 Operationen des GA die Lösungsmenge des GS nicht, d.h.
- die Vertauschung von Zeilen,
 - die Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl,
 - die Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen
- sind äquivalente Umformungen des GS.

Lösen Sie nun dieses lineare GS mittels GA bzw. durch geschickte Anwendung der 3 o.g. Operationen auf die Zeilen des GS!