MST	Übung 8 Mathematik I Prof. Dr.B.Grabowski Vektorräume, affine Räume, Lineare Unabhängigkeit, Basen, Dimensioni

Aufgabe 1

- **a)** Geben Sie 2 linear unabhängige Vektoren im R^3 an!
- **b)** Geben Sie 3 linear unabhängige Vektoren im R^3 an!
- **c)** Geben Sie 3 linear abhängige Vektoren im R^3 an!
- **d)** Geben Sie 4 linear abhängige Vektoren im R^3 an!

Aufgabe 2

Untersuchen Sie, ob folgende Vektoren linear unabhängig sind:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

d) Was könne Sie aus c) ableiten? Welche Gestalt müssen k Vektoren der Länge k haben, damit sie mit Sicherheit linear unabhängig sind?

Aufgabe 3

3 Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sind linear unabhängig, falls gilt:

„aus $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 = \vec{0}$ folgt: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ “, d.h. falls der $\vec{0}$ – Vektor nur trivial darstellbar ist.

Seien $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 3 linear unabhängige Vektoren. Seien $\vec{b}_1 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$, $\vec{b}_2 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_3$, $\vec{b}_3 = \vec{a}_2 + \vec{a}_3$.

Untersuchen Sie unter Verwendung des o.g. Kriteriums für die lineare Unabhängigkeit, ob $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ linear unabhängig sind!

Aufgabe 4

- **a)** Geben Sie eine Basis im R^3 an!
- **b)** Geben Sie eine Basis im R^4 an!
- **c)** Geben Sie mindestens 2 Erzeugendensysteme des R^3 an, die keine Basis sind!

Aufgabe 5

Welche der 4 Mengen von Vektoren bilden keine Basis im R^3? (Begründung!)

$$M0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad M1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\},$$

$$M2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}, \qquad M3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 6

a) Geben Sie einen konkreten affinen Raum der Dimension 1 im R^3 an!
b) Geben Sie einen konkreten affinen Raum der Dimension 2 im R^3 an!
c) Geben Sie einen konkreten affinen Raum der Dimension 3 im R^3 an!

Aufgabe 7

Welche der folgenden Mengen ist ein Vektorraum (VR), welche ein affiner Raum (AR) und welche weder noch (Begründung)? Wenn es sich um einen VR oder AR handelt, so geben Sie die Dimension des Raumes, die Basis und ggf. den Aufpunkt an!

a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} \mid \quad t \in R \right\}$ b) $M = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} \mid \quad t \in R \right\}$ c) $M = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} \mid \quad t > 0 \right\}$

Aufgabe 8

Wir betrachten Funktionen mit den reellen Zahlen als Definitionsbereich. Die Operationen + (Addition zweier Funktionen) und · (Multiplikation einer Funktion mit einem Skalar) seien wie folgt definiert:

(f+g)(x) := f(x) + g(x) für alle $x \in R$
$(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$ für alle $x \in R$

Auf der Basis dieser beiden Operatoren betrachten wir den Vektorraum V aller Schwingungen der Frequenz 1:

$$V = \{ f : x \in R \to f(x) \in R \mid \quad f(x) = \sim \sin(x) + \quad \cos(x), \sim \in R, \quad \in R \}$$

a) Zeigen Sie, dass die beiden Funktionen $f_1(x) = \sin(x)$, $f_2(x) = \cos(x)$ linear unabhängig sind, also eine Basis im Vektorraum (V, + , ·) bilden!

b) Wie groß ist die Dimension von V?

c) Zeigen Sie: zwei Schwingungen $g1(x) = \sim_1 \sin(x) + {}_1 \cos(x)$ und $g2(x) = \sim_2 \sin(x) + {}_2 \cos(x)$, $x \in R$ sind identisch für alle $x \in R$, falls die Koeffizienten übereinstimmen, d.h. falls gilt : $\sim_1 = \sim_2$ und ${}_1 = {}_2$.

MST	Übung 8 Mathematik I Prof. Dr.B.Grabowski Vektorräume, affine Räume, Lineare Unabhängigkeit, Basen, Dimensioni

Aufgabe 9
Wir betrachten Funktionen mit den reellen Zahlen als Definitionsbereich. Die Operationen + (Addition zweier Funktionen) und · (Multiplikation einer Funktion mit einem Skalar) seien wie folgt definiert:

$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ für alle $x \in R$
$(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$ für alle $x \in R$

Auf der Basis dieser beiden Operatoren betrachten wir den Vektorraum V aller Polynome bis zur Ordnung 3
$V = \{ f : x \in R \to f(x) \in R \mid \quad f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a,b,c,d \in R \}$

a) Zeigen Sie, dass die 4 Funktionen $f_1(x) = x^3, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = x, \quad f_4(x) = 1$
linear unabhängig sind, also eine Basis im Vektorraum (V, + , ·) bilden!

b) Wie groß ist die Dimension von V?

c) Zeigen Sie: zwei Polynome $p_1(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1, \quad p_2(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2,$
bis zur Ordnung 3 sind identisch für alle $x \in R$, falls die Koeffizienten übereinstimmen, d.h. falls gilt :
$a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, d_1 = d_2.$