Matrizenoperationen

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Transponierten folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Welche dieser Matrizen sind symmetrisch?

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 2 \\ -4x + 2y &= 1 \end{aligned}$$

a) Durch das Einsetzverfahren
b) Durch Verwendung von Determinanten (Cramersche Regel)

Machen Sie jeweils die Probe!

Aufgabe 3

Gegeben seien folgende Messdatenpaare: (2,3) und (5,1).
Geben Sie die Gerade y=ax+b an, die durch die beiden Punkte verläuft, indem Sie

a) ein Gleichungssystem aufstellen, welches die beiden Parameter a und b der Geraden erfüllen müssen!
b) dieses Gleichungssysteme durch die Cramersche Regel lösen!

Aufgabe 4

Berechnen Sie die Lösung z des folgenden Gleichungssystems mittels Cramerscher Regel:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 2 \\ -4x + 2y + 2z &= 1 \\ x - y - 2z &= -1 \end{aligned}$$

Aufgabe 5

Durch folgende 3 Messpunkte (x_i, y_i) , i=1,...,4 geht genau ein Polynom 2. Grades

y= $ax^2 + bx + c$.

Xi	-1	0	2
Yi	0	1	1

Bestimmen Sie die Koeffizienten a-c dieses Polynoms, indem Sie zunächst ein Gleichungssystem aufstellen und dieses dann mittels der Cramerschen Regel lösen!

Aufgabe 6

Man adddiert und subtrahiert Matrizen ***vom gleichen Typ*** elementweise**.**

Auch die Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl wird elementweise durchgeführt, d.h. es ist

$$\mathrm{a}\left(\left(a_{ij}\right)\right)_{i=1,\dots,m}^{j=1,\dots,n} + «\left(\left(b_{ij}\right)\right)_{i=1,\dots,m}^{j=1,\dots,n} = \left(\left(\mathrm{a}\, a_{ij} + «b_{ij}\right)\right)_{i=1,\dots,m}^{j=1,\dots,n}$$

Seien $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Matrix C= $(2A - 3B)^T$

Aufgabe 7

Man multipliziert 2 Matrizen A und B miteinander, indem man das Skalarprodukt jeder Zeile von A mit jeder Spalte von B bildet:

Sei A= $\begin{pmatrix} \vec{a}_1^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{a}_m^{\,T} \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \cdots & \vec{b}_n \end{pmatrix}$.

Dann ist $A * B = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{a}_m^{\,T} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \cdots & \vec{b}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1m} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$ mit $c_{ij} = \vec{a}_i^{\,T} \cdot \vec{b}_j$ für alle i=1,...,m und j=1,...,n.

Multiplizieren Sie jeweils die Matrizen A und B miteinander, d.h. berechnen Sie A*B und B*A!
Begründen Sie ggf., warum die Matrizenmultiplikation nicht möglich ist!

a) $A = \begin{pmatrix} 43 \\ 11 \\ 23 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 8

Seien $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Matrix $C=A^T \cdot B$ und $D = B^T A$. Wie hängen C und D miteinander zusammen?

b) Berechnen Sie die Matrix $F = (2A - 3B)^T \cdot B$

c) Berechnen Sie die Matrix C für die gilt: $B \cdot B^T \cdot C = E_2$

Aufgabe 9

Berechnen Sie die Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 2 \\ -4x + 2y &= 1 \end{aligned}$$

durch Verwendung der inversen Koeffizientenmatrix!

Machen Sie die Probe!