Vl. 14.11.2013

Bemerkungen: Es gilt:

1.) $\lambda \cdot \vec{a}$ ist $|\lambda|$ mal so lang wie $\vec{a}$

$\vec{a}\uparrow \quad \uparrow \frac{1}{2}\vec{a} \quad \downarrow -\frac{1}{2}\vec{a} \quad 2\vec{a}$

2) Ist $|\lambda| > 1$, so ist $\lambda\vec{a}$ länger als $\vec{a}$

3) Ist $|\lambda| < 1$, so ist $\lambda\vec{a}$ kürzer als $\vec{a}$

4) Ist $\lambda > 0$ so gilt $\lambda\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$
$\lambda < 0$ " $\lambda\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$

Nov 14-08:27

2.3.6. Eigenschaften von $+, -, \cdot\lambda$

Satz: Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (Kommutativ)

2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (assoziativ)

3) $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

4) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

$\Big\}$ (distributiv)

Bew: zu 3) Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$

$$LS = \lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \underset{\substack{\text{Def} \\ \text{Add} \\ \text{v. Vekt.}}}{=} \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{Def} \\ \cdot\lambda}}{=} \begin{pmatrix} \lambda(a_1 + b_1) \\ \vdots \\ \lambda(a_n + b_n) \end{pmatrix}$$

Nov 14-08:31

$$\underset{\mathbb{R}}{=} \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \lambda b_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n + \lambda b_n \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{Add. von Vektoren}}{=} \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda b_1 \\ \vdots \\ \lambda b_n \end{pmatrix}$$

$$\underset{\cdot\lambda}{=} \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \vec{b} = \underline{\underline{RS}}$$

ged.

Bsp: A 2.4.

$$\vec{F_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{F_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{F_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die resultierende Kraft $\vec{F}$.

Nov 14-08:35

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie die Gegenkraft zu $\vec{F}$

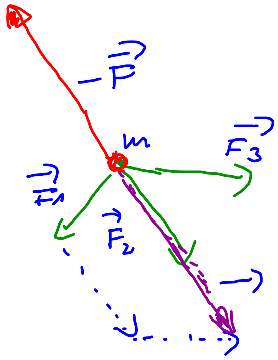
$$-\vec{F} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

c) Berechne Sie die Kraft

$$\vec{F}^* = 2\vec{F_1} + \vec{F_2} - \vec{F_3}$$

$$= \begin{pmatrix} -2+1-3 \\ 0+2-1 \\ 2+1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

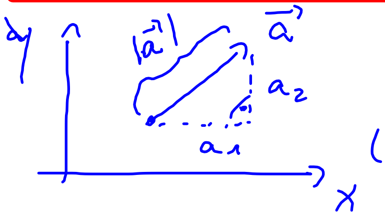
Nov 14-08:38



$\longrightarrow \vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$

$\Rightarrow$ m bleibt in Ruhe (es wirkt keine Kraft auf m)

2.4. Der Betrag eines Vektors



$$|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2$$

(Pythagoras)

$$\Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Nov 14-08:40

Def: Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Dann heißt

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i}$$

Betrag von $\vec{a}$.

Geom. Bedeutung: $|\vec{a}|$ = Länge von $\vec{a}$

Nov 14-08:46

Aufgabe:

Geg: $\vec{a}$

Ges: Mit welcher Zahl λ muss man $\vec{a}$ multiplizieren, damit $\lambda\vec{a}$ die Länge 1 hat?

Lösung:

$$|\lambda\vec{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\lambda a_i)^2} = \sqrt{\sum_i \lambda^2 a_i^2} = \sqrt{\lambda^2 \sum_i a_i^2} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{\sum_i a_i^2} = |\lambda|\,|\vec{a}| \overset{!}{=} 1$$

Nov 14-08:48

$$\Rightarrow |\lambda| = \frac{1}{|\vec{a}|}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{|\vec{a}|} \quad \text{oder} \quad \lambda = -\frac{1}{|\vec{a}|}$$

Satz: Es gibt für $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

1) $|\lambda\vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$

2) $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ hat die Länge 1

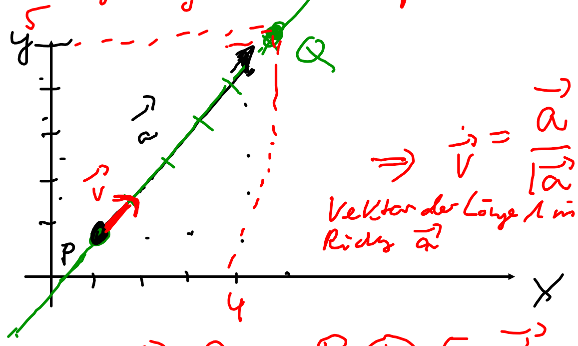
Def: Ein Vektor der Länge 1 heißt <u>normiert</u>.

Nov 14-08:51

Bsp: Geg. sei $P = (1,1)$ und

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie den Pkt Q an, der von P 5 Längeneinheiten in Richtung $\vec{a}$ entfernt ist!



$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

Vektor der Länge 1 in Richtung $\vec{a}$

$$\Rightarrow Q = P \oplus 5 \cdot \vec{v}$$

Nov 14-08:57

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \frac{5}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

bzw: $Q = (4,5)$

Bemerkung: Statt $\oplus$ schreibt man i. A. nur "+"

Nov 14-09:04

2.5. Das Skalarprodukt von Vektoren

Es gibt 3 verschiedene Produkte von Vektoren:

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ $\left(= (\vec{a}, \vec{b})\right)$ Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$

$\vec{a} \times \vec{b}$ $\left(= \vec{a} \otimes \vec{b}\right)$ Kreuz- oder Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$

$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ Spatprodukt im $\mathbb{R}^3$

Wir beginnen mit dem Skalarprodukt

Nov 14-09:08

2.5.1. Die karthesische Def. des Skalarproduktes

Def: Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$,

$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Dann heißt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \in \mathbb{R}$$

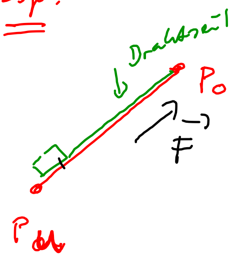
Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Schreibweisen: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ oder $(\vec{a}, \vec{b})$

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = \underline{\underline{26}}$

Nov 14-09:11

Bsp: ↗ A 2.7.



Schrägaufzug

Auf das Seil wirkt eine konstante Kraft $\vec F$.

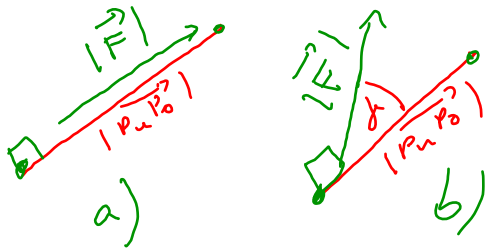
Welche Arbeit wird verrichtet um den Aufzug von P_u nach P_o zu bewegen?

Lösung:

$$W = \text{Kraft} \cdot \text{Weg}$$
$$= \vec F \circ \overrightarrow{P_u P_o}$$

($\Rightarrow$ Skalarprodukt zw. $\vec F$ und $\overrightarrow{P_u P_o}$)

Nov 14-09:14



Es gilt (Physik):

$$W = |\vec F|\,|\overrightarrow{P_u P_o}| \cdot \cos(\gamma)$$

$\cos(0^\circ) = 1$

0°

a)

$$W = |\vec F|\,|\overrightarrow{P_u P_o}|$$

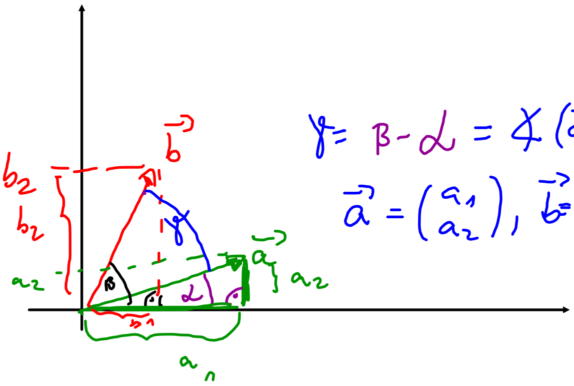
b)

$$W < |\vec F|\,|\overrightarrow{P_u P_o}|$$

90°

Nov 14-09:17

2.5.2. Die Winkeldef. als Skalarproduktes



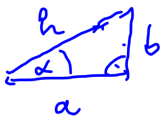
$\gamma = \beta - \alpha = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

Es gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 \qquad (1)$$

Gesehen im rechtw. Δ:



a, b Katheten
h Hypothenuse

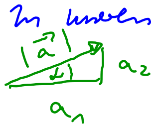
Nov 14-09:22

$$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{b}{h} = \sin(\alpha)$$

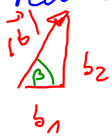
$$\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{a}{h} = \cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} a &= h \cdot \cos(\alpha) \\ b &= h \cdot \sin(\alpha) \end{aligned}}$$

$\Rightarrow$ In unseren beiden rechtw. Δ



und



gilt also

$$(2) \begin{cases} a_1 = |\vec{a}| \cos(\alpha) & b_1 = |\vec{b}| \cos(\beta) \\ a_2 = |\vec{a}| \sin(\alpha) & b_2 = |\vec{b}| \sin(\beta) \end{cases}$$

Nov 14-09:26

(2) in (1) eingesetzt, ergibt

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$= |\vec{a}|\cos(\alpha)|\vec{b}|\cos(\beta) + |\vec{a}|\sin(\alpha)|\vec{b}|\sin(\beta)$$

$$= |\vec{a}||\vec{b}|\left[\underbrace{\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)}_{\cos(\beta-\alpha)}\right]$$

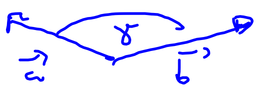
Additionstheorem
→ Tafelwerke

$$= |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\gamma)$$

$$= |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}))$$

Nov 14-09:30

Satz: Seien $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^n$ und
$\gamma = \sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$ mit $0\le\gamma\le 180°$.



Dann gilt:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\gamma)$$

Folgerungen:

1) Geg. $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^n$

Ges.: sei $\gamma=\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$. Ges.: γ.

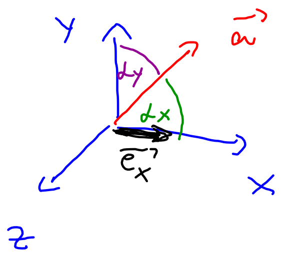
Lösung: $\cos(\gamma) = \dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

Nov 14-09:33

$$\Rightarrow \gamma = \underbrace{\cos^{-1}}_{\arccos}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)$$

2) Welchen Winkel α_x besitzt

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ zur x-Achse?



wir beschreiben die x-Achse durch den Einheitsvektor in Richtg x-Achse:

$\vec{e_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Nov 14-09:36

$$\Rightarrow \alpha_x = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{e_x}\cdot\vec{a}}{|\vec{e_x}||\vec{a}|}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{a_x}{|\vec{a}|}\right)$$

Zahlenbeispiel:

ges: α_x von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

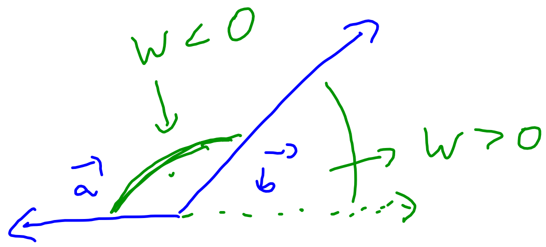
Lösg: $|\vec{a}| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$

$$\alpha_x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$$

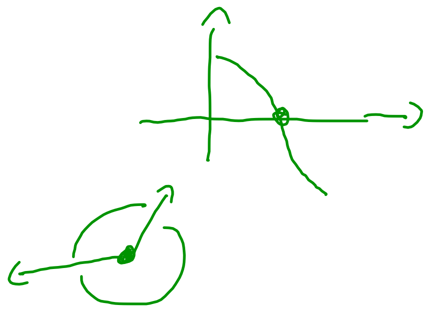
$$\underline{\underline{= 74{,}49°}}$$

HA Blatt 4 + Skript 2. bis 2.5.3

Nov 14-09:40



$$|\vec{a}||\vec{b}|\ cs(\gamma)$$



Nov 14-09:44