Vl 15.10.2013

Mathematik 1

Kapitel 1 Algebra-Grundlagen

1.1. Zweiwertige mathematische Logik

1.1.1. Aussagen und Boolsche Funktionen

Gegenstand mathem. Betrachtungen sind Aussagen.

Okt 15-10:23

Definition: (Def.:)

Eine Zusammenfassung von Worten heißt Aussage (der 2-wertigen Logik) falls ihr eindeutig der Wahrheitswert Wahr (W, 1) oder Falsch (F, 0) zugeordnet werden kann.

In der Mathematik geht es immer darum, den Wahrheitswert einer Aussage zu ermitteln.

Okt 15-10:28

Bsp: Aussage oder nicht?

1) $\boxed{\text{"Ich lüge jetzt"}}$ keine Aussage ($\not\exists$ zwischen W u. F)

Logische Antinomie

W → wäre Falsch weil ich ja lüge.

$\Downarrow$ Widerspruch

F → Ich würde also nicht lügen, wenn man den Satz sagt → W

$\Downarrow$ Wiederspruch

2) $\boxed{\text{"Ich würfle eine 6"}}$

hat keinen Wahrheitswert W, F (1, 0)

sondern einen Wert dazwischen: $1/6$ = Chance

Okt 15-10:31

mit der eine "6" gewürfelt werden kann.

keine Aussage

= Ereignis (aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung)

3) $\boxed{\text{"4 ist eine ungerade Zahl"}}$

ist eine Aussage, Wahrheitswert: F

4) $\boxed{\text{"Wenn heute Montag ist, so ist morgen Dienstag"}}$

ist eine Aussage

Wahrheitswert: W

Okt 15-10:39

5) Wenn m^2 eine gerade nat. Zahl ist, so ist auch m eine gerade nat. Zahl

ist eine Aussage

Wahrheitswert : W

zu 4) und zu 5) werden wir noch nachweisen, dass der Wahrheitswert = W ist.

Okt 15-10:43

Aussagen können durch Logische Operatoren (Junktoren) verknüpft werden. Es entstehen Ausdrücke.

Logische Operatoren:

$\wedge$ (und, Konjunktion)

$\vee$ (oder, Disjunktion)

$\neg$ (nicht, Negation)

$\Rightarrow$ (wenn ..., dann ...) (Implikation)

$\Leftrightarrow$ (genau dann ..., wenn ...) (Äquivalenz)

$\oplus$ (entweder ... oder ...) (Antivalenz)

Okt 15-10:48

Bemerkung:

Aussagen kürzen wir durch kleine Buchstaben $a, b, \ldots, p, q, \ldots$ ab.

Bsp für Ausdrücke Aussagen:

Sei a = "Das Objekt ist ein Quadrat"

b = "Das Objekt ist ein Viereck"

Ausdruck:

$a \Rightarrow b$ (W)

$b \Rightarrow a$ (F)

$\neg a$

Okt 15-10:54

"$4 > 0$" $\Leftrightarrow$ "$-4 < 0$"

Definition: Eine Abbildung A, die jeweils k Aussagen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ einen Ausdruck $A(a_1, \ldots, a_k)$ zuordnet, heißt k-stellige Boolsche Funktion.

Schreibweise:

$$A : (a_1, \ldots, a_k) \in \{W, F\}^k \rightarrow A(a_1, \ldots, a_k) \in \{W, F\}$$

$$f : x \in D \longrightarrow y = f(x) \in W$$

Kurz: $y = f(x), x \in D$

Okt 15-10:57

Beispiele:

(1) $A: a \in \{W,F\} \to A(a) = \neg a \in \{W,F\}$

einstellige Boolsche Fkt. (BF)

kurz: $A(a) = \neg a$

(2) $A(a,b) = a \vee b$

$A: (a,b) \in \{W,F\}^2 \to A(a,b) = a \vee b \in \{W,F\}$

zweistellige BF

(3) $A(a,b,c) = (a \vee b) \wedge c$

dreistellige BF

Okt 15-11:02

Boolsche Funktionen können wir vollständig durch ihre Wertetabellen (die sogenannten Wahrheitswerttabellen) (WWT) beschreiben (weil der Def.bereich BF endlich ist)

Bsp: zu (1):

a	$A(a) = \neg a$
W	F
F	W

Bsp:

a	b	$A(a,b) = a \wedge b$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

Okt 15-11:06

Wir kennen 6 Boolsche Grundfunktionen, die wir durch ihre WWT definieren.

Definition:

$A(a) = \neg a$ (Negation)

a	$\neg a$
W	F
F	W

$A(a,b) = a \vee b$ (Disjunktion)

a	b	$a \vee b$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Okt 15-11:13

$A(a,b) = a \wedge b$ (Konjunktion)

a	b	$a \wedge b$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

$A(a,b) = (a \Rightarrow b)$ (Implikation)

a	b	
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Okt 15-11:16

$A(a,b) = (a \Leftrightarrow b)$ (Äquivalenz)

a	b	$a \Leftrightarrow b$	$\neg(a \Leftrightarrow b)$
W	W	W	F
W	F	F	W
F	W	F	W
F	F	W	F

$A(a,b) = (a \oplus b)$ (Antivalenz)

a	b	$a \oplus b$
W	W	F
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Man sieht $[a \oplus b \Leftrightarrow \neg(a \Leftrightarrow b)]$

Okt 15-11:21

Unter Verwendung dieser Boolschen Grundfunktionen können wir uns die WWT beliebiger k-stelliger BF aufstellen. 2^k mögl. Kombin.

Bsp: $(\neg a \vee b) \wedge c = A(\underbrace{a,b,c}_{k})$

a	b	c	$\neg a$	$\neg a \vee b$	$(\neg a \vee b) \wedge c$
W	W	W	F	W	W
W	W	F	F	W	F
W	F	W	F	F	F
W	F	F	F	F	F
F	W	W	W	W	W
F	W	F	W	W	F
F	F	W	W	W	W
F	F	F	W	W	F

$\neg a \vee b \wedge c \Leftrightarrow (\neg a) \vee (b \wedge c)$

Okt 15-11:25