Vl. 17.10.2013

a	b	$\underbrace{a \Leftrightarrow b}_{A(a,b)}$	$a \oplus b$	$\underbrace{\neg(a \oplus b)}_{B(a,b)}$
W	W	W	F	W
W	F	F	W	F
F	W	F	W	F
F	F	W	F	W

$k=2 \Rightarrow 2^2 = 4$

Okt 17-08:32

Fuer die Argumente a1,...ak einer BF A(a1,...,ak) gibt es genau 2^k moegliche Belegungen mit W und F.

$\left.\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{matrix}\right\}$ 2^k mögliche Belegungen von $a_1 \ldots a_k$ mit W, F

↗ Aufgabe 0 Üblatt 1

Okt 17-08:29

$$C(a,b) = \underbrace{(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow (\neg(a \oplus b))}_{A(a,b) \Leftrightarrow B(a,b)}$$

$A(a,b) \Leftrightarrow B(a,b)$	
W	
W	
W	
W	

Definition: Eine Boolsche Funktion $A(a_1,\ldots,a_k)$ heißt allgemeingültig, falls sie bei jeder Belegung von $a_1,\ldots,a_k$ mit W o. F stets W ist.

Bsp: $(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow (\neg(a \oplus b))$

Okt 17-08:35

Def: 2 k-stellige Boolsche Funktionen $A(a_1,\ldots,a_k)$ und $B(a_1,\ldots,a_k)$ heißen äquivalent, falls ihre Wahrheitswerttabellen übereinstimmen.

Schreibweise:

$$A(a_1,\ldots,a_k) \Leftrightarrow B(a_1,\ldots,a_k)$$

Okt 17-08:40

Satz: Voraussetzung: seien $A(a_1, \ldots, a_k)$ und $B(a_1, \ldots, a_k)$ äquivalent

Behauptung: $C(a_1, \ldots, a_k)$

$= A(\ldots) \Leftrightarrow B(\ldots)$

ist allgemeingültig.

Bsp:

A	B
$a \Leftrightarrow b$	$\neg(a \oplus b)$
$a \vee b$	$\neg(\neg a \wedge \neg b)$
a	$\neg\neg a$

Okt 17-08:42

Satz: (1.1)

Behauptung:
Es gelten folgende Äquivalenzen

1) $\neg(\neg a) \Leftrightarrow a$

2) $(a \wedge b) \Leftrightarrow (b \wedge a)$ } Kommutativ

3) $(a \vee b) \Leftrightarrow (b \vee a)$

4) $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$ Kontraposition

5) $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (b \vee \neg a)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg b \wedge a)$

Okt 17-08:47

6) $(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow [(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)]$

7) $(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow [(b \vee \neg a) \wedge (a \vee \neg b)]$

$\Leftrightarrow [(b \wedge a) \vee (\neg b \wedge \neg a)]$

8) $\neg (a \wedge b) \Leftrightarrow [(\neg a) \vee (\neg b)]$

9) $\neg (a \vee b) \Leftrightarrow [\neg a \wedge \neg b]$

8) 9) De Morgan'schen Regeln

10) $(a \vee b) \wedge c \Leftrightarrow (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$

11) $(a \wedge b) \vee c \Leftrightarrow (a \vee c) \wedge (b \vee c)$

10), 11) Distributivität

Okt 17-08:52

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$a \vee b$	$\neg(a \vee b)$	$(\neg a) \wedge (\neg b)$
W	W	F	F	W	F	F
W	F	F	W	W	F	F
F	W	W	F	W	F	F
F	F	W	W	F	W	W

$\Rightarrow \neg (a \vee b) \Leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b)$

q.e.d.

Okt 17-09:02

12) $(a\wedge b)\wedge c \Leftrightarrow a\wedge(b\wedge c)$

13) $(a\vee b)\vee c \Leftrightarrow a\vee(b\vee c)$

12), 13) Assoziativität

14) $(a\Leftrightarrow b) \Leftrightarrow \neg(a\oplus b)$

Beweis: zu 9) $\neg(a\vee b)\Leftrightarrow(\neg a\wedge\neg b)$

Die Richtigkeit der Behauptung 9) zeigen wir durch Aufstellen der Wahrheitswerttabellen von $\neg(a\vee b)$ und $(\neg a)\wedge(\neg b)$.

Okt 17-08:57

1.1.2. Aussageformen

Definition: Ersetzt man in einer Aussage a eine Konstante durch eine Variable x, so entsteht eine Aussageform a(x).

Bsp.: 1) a: „$4\geq 0$" Aussage

a(x): $x^2\geq 0$ Aussageform

2) a(m): m^2 gerade $\Rightarrow$ m gerade

Aussageform

Okt 17-09:10

Bei Aussageformen wird durch sogenannte Quantoren angegeben, auf welche Werte sich die in der Aussageform enthaltene Variable (x, n, ...) bezieht.

Definition:

$\forall$ = Allquantor

$\exists$ = Existenzquantor

Schreibweisen und ihre Bedeutung

$\forall x \in M: a(x)$ Für jedes x aus der Menge M ist $a(x)$ wahr

Okt 17-09:14

Bsp: (1) $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$

(2) $\forall n \in \mathbb{N}: n^2$ gerade $\Rightarrow n$ gerade

$\exists x \in M: a(x)$ Es existiert ein x in M für das $a(x)$ wahr ist.

Bsp: (1) $\exists x \in \mathbb{N}: x < 4$

Bsp: Sei G die Menge der MST-Studenten des 1. Semesters

(2) $\exists x \in G$: x besteht die Mathe-Klausur

Okt 17-09:02

Was muss man können?

1) Aussageformen in ihrer Bedeutung — Text

Hyroglyphen (l.g. Darstellung)

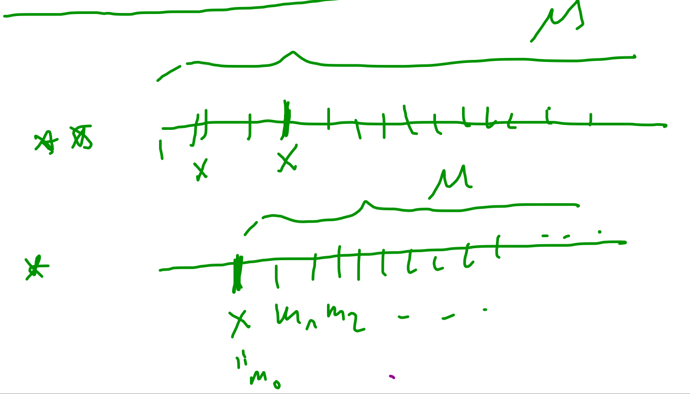
2) Text als Aussageform darstellen.

Bsp:

Logische Darstellung	Bedeutung
$\forall x\in\mathbb{R}: \neg\underbrace{(x^2<0)}_{x^2\ge 0}$	Quadrate reeller Zahlen sind nie negativ

Okt 17-09:22

Logische Darstellung	Bedeutung
$\exists x\in M: \forall m\in M: x\le m$	Die Menge M besitzt ein Minimum
$\forall x\in M: \exists m\in M: m<x$	Die Menge M besitzt kein Minimum



Okt 17-09:26

Logische Darstellung	Bedeutung
$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}:$ $x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R}: x < z < y$	Zwischen je zwei reellen Zahlen liegt eine dritte
$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \exists z \in \mathbb{R}:$ $x < z < y \ \vee\ y < z < x$	
Abkürzend:	
$\forall x, y \in \mathbb{R}\ \exists z \in \mathbb{R}:$ $x < z < y \ \vee\ y < z < x$	

Okt 17-08:58

Negation von Aussageformen

$$\neg\left(\forall x \in M: a(x)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists x \in M: \neg a(x)$$

$$\neg\left(\exists x \in M: a(x)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in M: \neg a(x)$$

Okt 17-09:39

Bsp: • M besitzt ein Minimum

$\exists x \in M \ \forall m \in M: x \leq m$

• M besitzt kein Minimum

$\neg(\exists x \in M \ \forall m \in M: x \leq m)$

$\Leftrightarrow \forall x \in M \ \neg(\forall m \in M: x \leq m)$

$\Leftrightarrow \forall x \in M \ \exists m \in M: \neg(x \leq m)$

$\Leftrightarrow \forall x \in M \ \exists m \in M: m < x$

Okt 17-09:44