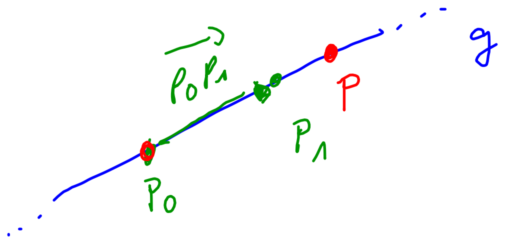
Vl. 21.11.2013

3. Geometrie von Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$ (und $\mathbb{R}^2$)

3.1. Geraden-Definitionen

3.1.1. Parameterdarstellungen



Nov 21-08:26

Def: Eine Gerade ist die Menge von Punkten im $\mathbb{R}^3$

$$g = \left\{ P \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; P = P_0 + \lambda \overrightarrow{P_0P_1},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}: P = P_0 + \lambda \overrightarrow{P_0P_1}$$

$P_0, P_1 \in \mathbb{R}^3$ sind zwei Punkte

P_0 = Aufpunkt, $\overrightarrow{P_0P_1}$ = Richtungsvektor

(Zwei-Punkte-Form der Geraden)

λ = Parameter

Nov 21-08:29

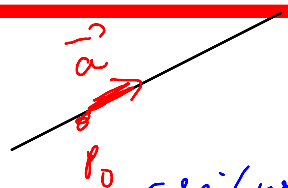
Def: Seien $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ ein Vektor und $P_0 \in \mathbb{R}^3$ ein Punkt.

Dann heißt

$$g = \{ P \in \mathbb{R}^3 \,/\, P = P_0 + \lambda \vec{a},\ \lambda \in \mathbb{R} \}$$

Punkt-Richtungsform von g.

(λ = Parameter, P_0 = Aufpunkt,
$\vec{a}$ = Richtungsvektor)

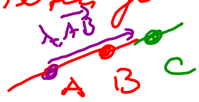


Abkürzende Schreibweise:

g: $P = P_0 + \lambda \vec{a}$; $P = P_0 + \lambda \overrightarrow{P_0 P_1}$
$\lambda \in \mathbb{R}$

Nov 21-08:33

Bsp: Bestimmen Sie den Punkt $C = (2, 2, \mu)$ bzw. μ so, dass C auf der durch die beiden Punkte $A = (3, 2, 0)$ $B = (2, 2, 1)$ definierten Geraden liegt!



Lösung: Geradengleichung:

g: $P = A + \lambda \overrightarrow{AB}$

wenn C auf g liegt muss gelten: $C \in g$, d.h. $\exists \lambda_c$

$$C = A + \lambda_c \overrightarrow{AB}$$

"$B - A$"

Nov 21-08:36

$\Longleftrightarrow C = A + \lambda_C \text{ "}B-A\text{"}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_c \begin{pmatrix} 2-3 \\ 2-2 \\ 1-0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda_c \\ 2 \\ \lambda_c \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left.\begin{aligned} & 2 = 3-\lambda_c \\ \wedge\ & \cancel{2 = 2} \\ \wedge\ & \mu = \lambda_c \end{aligned}\right\}$$

Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 2 Unbekannten λ_c, μ

Nov 21-08:39

$$\Longleftrightarrow \begin{aligned} 2 &= 3-\lambda_c \quad (1) \\ \mu &= \lambda_c \quad (2) \end{aligned}$$

<u>Lösung</u>: (1): $\lambda_c = 3-2 = 1$

(2): $\mu = 1$

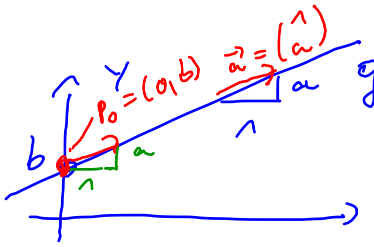
$\Rightarrow$ <u>Ergebnis</u>:

C erfüllt genau dann die Geradengleichung (liegt auf der Geraden $A + \lambda\overrightarrow{AB}$, falls gilt: $\mu = 1$

$\Rightarrow$ $\underline{C = (2, 2, 1)}$

Nov 21-08:42

3.1.2. Nichtparametrische Geraden-Darstellung im $\mathbb{R}^2$



$g \quad y = ax + b$

$x \in \mathbb{R}$

$$y = ax + b, \quad x \in \mathbb{R} \quad (*)$$

heißt nichtparametrische Darstellung oder Normalform von g.

$(*)$ bedeutet:

$$g = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y = ax + b, \; x \in \mathbb{R}\}$$

Nov 21-08:46

Umrechnung:

Normalform $\longleftrightarrow$ Punkt-Richtungs-Form

(NF) $\longleftrightarrow$ (PRF)

NF $\rightarrow$ PRF:

$\boxed{NF}$ $y = ax + b$

$$\Rightarrow p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ ax+b \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}}_{P_0} + \underbrace{x}_{\lambda} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}}_{\vec{a}} \quad \boxed{PRF}$$

$$= P_0 + \lambda \cdot \vec{a}$$

$x \in \mathbb{R}$

Nov 21-08:49

PRF → NF!

PRF: $P = P_0 + \lambda \vec{a}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ll} x = x_0 + \lambda a_x & (1) \\ y = y_0 + \lambda a_y & (2) \end{array}$$

Um den Zh zwischen x u. y direkt auszudrücken, stellen wir (1) nach λ um und setzen λ in (2) ein:

$(1) \Leftrightarrow \lambda = \left(\frac{x - x_0}{a_x}\right)$; in (2) eingesetzt:

$(2) \Leftrightarrow y = y_0 + (x - x_0) \cdot \frac{a_y}{a_x}$

Nov 21-08:52

$$\Leftrightarrow y = \underbrace{\frac{a_y}{a_x}}_{a} \cdot x + \underbrace{\left[y_0 - x_0 \frac{a_y}{a_x}\right]}_{b}$$

a: Anstieg von g

b: Schnittpkt mit y-Achse

Bsp: Wie lautet die Gerade

$g: P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in NF?

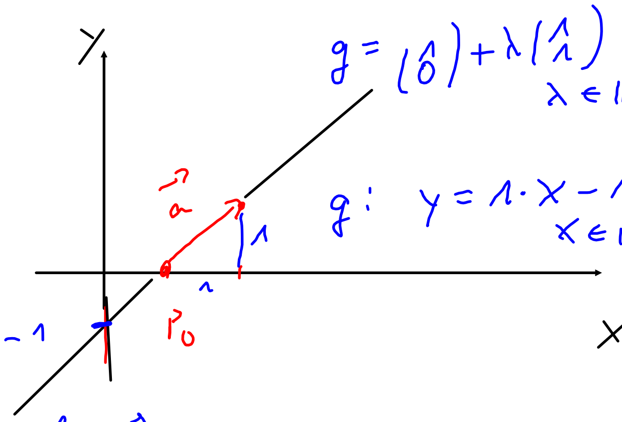
Lösung:

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ll} x = 1 + \lambda & (1) \\ y = \lambda & (2) \end{array}$$

$(1) \Rightarrow \lambda = x - 1 \Rightarrow (2)$: $\underline{y = x - 1}$, $x \in \mathbb{R}$ NF

Nov 21-08:55

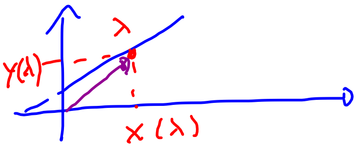


$$g = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$g: \; y = 1 \cdot x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

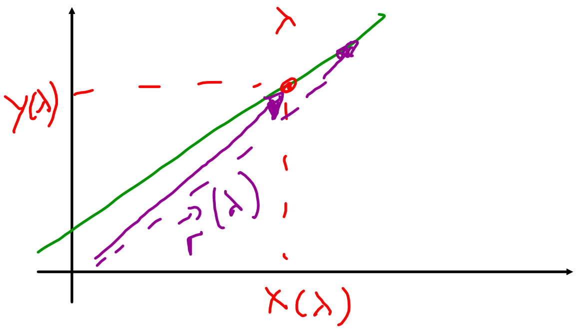
<u>Bemerkung:</u>
Wir schreiben auch in der Physik:

$$\vec r \overset{B}{(\lambda)} = \overbrace{\begin{pmatrix}x(\lambda)\\y(\lambda)\end{pmatrix}}^{P_\lambda} = \begin{pmatrix}x_0 + \lambda a_1\\y_0 + \lambda a_2\end{pmatrix}$$



i.A.: $\lambda = t$ (Zeit)

Nov 21-08:58



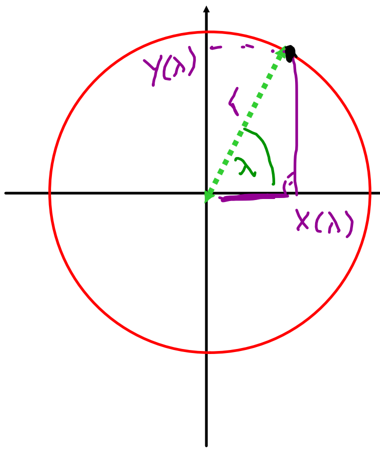
$\vec r(\lambda)$ = Ortskurve

Ortskurve einer Geraden:

$$\vec r(\lambda) = \begin{pmatrix}x_0 + \lambda a_1\\y_0 + \lambda a_2\end{pmatrix}$$

<u>Verallgemeinerung:</u>
Ortskurven kann man auch für krummlinige Gebilde (Wege) angeben

Nov 21-09:03



$\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \cos(\lambda)$

$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hyp.}} = \sin(\lambda)$

$\lambda = \omega \cdot t$

$$x(\lambda) = r\cos(\lambda)$$
$$y(\lambda) = r\sin(\lambda)$$

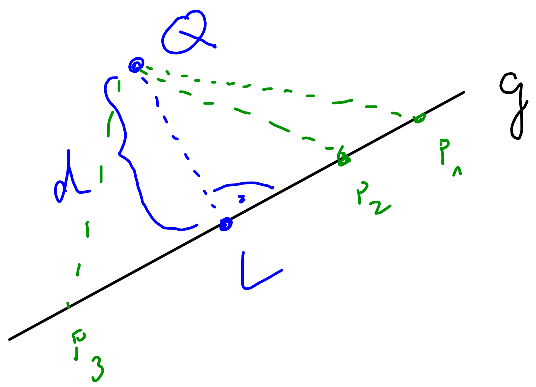
Ortsvektor des Kreises mit Radius r:

$$\vec{r}(\lambda) = r\begin{pmatrix}\cos(\lambda)\\ \sin(\lambda)\end{pmatrix}$$

Nov 21-09:07

3.2. Lagebeziehungen von Punkten und Geraden zu Geraden

3.2.1. Abstand eines Punktes zu einer Geraden im $\mathbb{R}^3$



Nov 21-09:12

Def:

$$d = d(Q,g) = \min_{P \in g} |\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{LQ}|$$

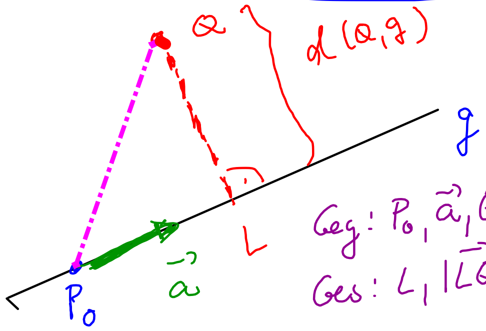
heißt Abstand von Q zu g.
Der Punkt L heißt Lotpunkt.

Satz: Sei L der Lotpunkt von Q auf g. Es gilt:

$$\overrightarrow{LQ} \perp g$$

Nov 21-09:14

Formel für den Abstand:



Geg: $P_0, \vec{a}, Q$

Ges: $L, |\overrightarrow{LQ}|$

was gilt:

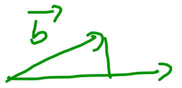
(1) $\overrightarrow{LQ} \perp \vec{a}$ bzw: $(\overrightarrow{LQ}, \vec{a}) = 0$

(2) $L = P_0 + \lambda \vec{a}$ $(L \in g)$

(3) Projektion von $\overrightarrow{P_0Q}$ auf $\vec{a}$ ist $\overrightarrow{P_0L}$ d.h.

$$\overrightarrow{P_0L} = (\vec{a}, \overrightarrow{P_0Q}) \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|^2}$$

Nov 21-09:18

[ $\vec{p}_r = \frac{(\vec{a},\vec{b})\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}$]

$\Rightarrow (3): L = P_0 + \overrightarrow{P_0L} \leftarrow$ aus (3)

$d = |\overrightarrow{LQ}| = |\text{"}Q - L\text{"}|$

ist berechenbar.

$$\overrightarrow{P_0L} + \overrightarrow{LQ} = \overrightarrow{P_0Q}$$

$$\overrightarrow{LQ} = \overrightarrow{P_0Q} - \overrightarrow{P_0L}$$

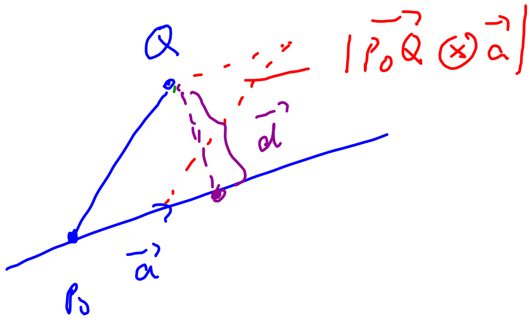
$$d(Q,g) = |\overrightarrow{LQ}|$$

Nov 21-09:22

Satz: Es gilt

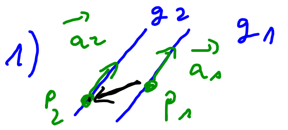
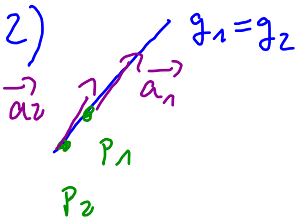
$$d(Q,g) = \frac{|\overrightarrow{P_0Q} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$$

Bew: $\rightarrow$ HA

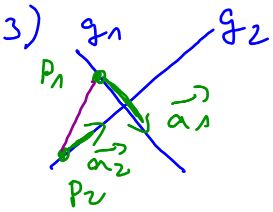
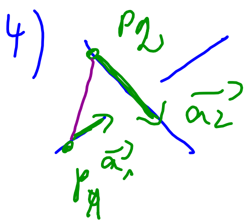


Nov 21-09:28

3.2.2. Lage von Geraden im $\mathbb{R}^3$ zueinander

Lage	Kriterien
1)  $g_1 \parallel g_2 \wedge g_1 \neq g_2$	$\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \wedge P_1 \notin g_2$ $\Longleftrightarrow$ $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \vec{0} \wedge \overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{a}_2 \neq \vec{0}$
2) 	$\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \wedge P_1 \in g_2$ $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{P_1P_2} \parallel \vec{a}_2$ $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \vec{0} \wedge \overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{a}_2 = \vec{0}$

Nov 21-09:32

Lage	Kriterien
3)  $g_1 \times g_2$	$\vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2 \wedge \overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2$ komplanar $\Longleftrightarrow$ $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \neq \vec{0} \wedge [\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2] = 0$
4)  $g_1 \not\times g_2$ windschief	$\vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2 \wedge \overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2$ nicht komplanar $\Longleftrightarrow$ $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \neq \vec{0} \wedge [\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2] \neq 0$

Nov 21-09:37

Lösung: g_2: $\vec{a_2}$, P_2

g_2: Richtungsvektor:

$$\vec{a_2} \parallel \vec{a_1} \Rightarrow \vec{a_2} = \vec{a_1}$$

Zu P_2:

1. Vektor $\vec{v}$ finden mit $\vec{v} \perp \vec{a_1}$

d.h. $(\vec{v}, \vec{a_1}) = 0$.

2. $P_2 = P_1 + 3 \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

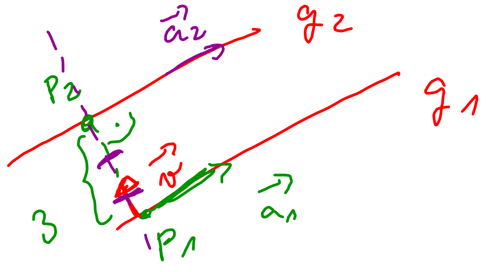
Nov 21-09:44

Bsp:

Konstruieren Sie zu

g_1: $P = P_1 + \lambda \vec{a_1}$

eine Gerade g_2 die parallel zu g_1 im Abstand 3 verläuft.



Nov 21-09:43