Vl. 5.12.2013

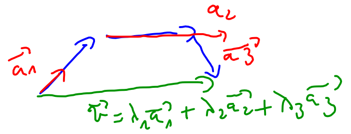
$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_r \in \mathbb{R}^n$

Bezeichnung:

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_r \vec{a}_r$$

Linearkombination von $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r$ (LK)

$\lambda_i \in \mathbb{R} \ \forall i = 1 \dots r$



Def: Die Menge V aller LK's von $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r\}$

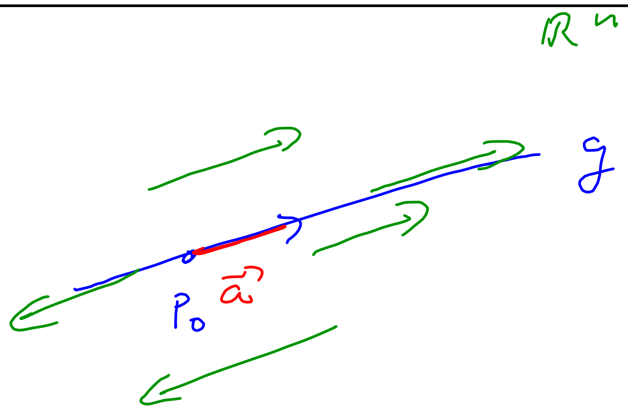
$V = \{\vec{v} \mid \vec{v} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \vec{a}_i, \ \lambda_i \in \mathbb{R}\}$ heißt

Lineare Hülle von $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r\}$.

$\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r\}$ heißt Erzeugendensystem von V.

$V = H(M)$, $M = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r\}$

Dez 5-08:33



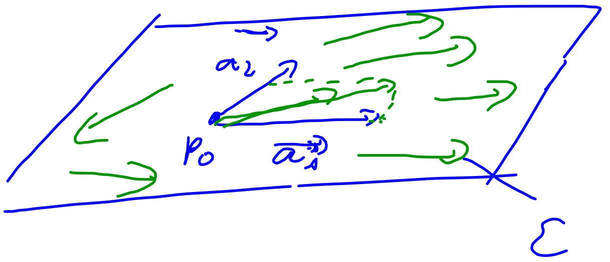
Menge V_1 aller Vektoren die // zu g verlaufen

$$V_1 = \{\vec{v} \mid \vec{v} = \lambda \vec{a}, \ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$= H(\underbrace{\{\vec{a}\}}_{M}) = \text{lin. Hülle von } M$$

M = Erzeugendensystem von V

Dez 5-08:34



$\vec a_1 \nparallel \vec a_2$

Menge aller Vektoren, die parallel zu E verlaufen

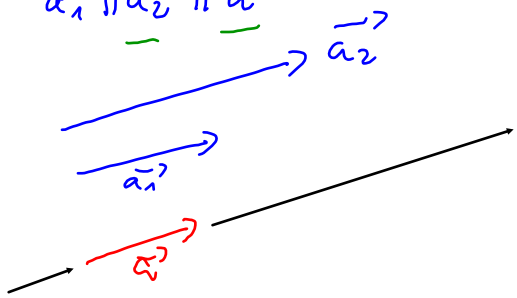
$$V_2 = \{\vec v \mid \vec v = \lambda_1 \vec a_1 + \lambda_2 \vec a_2,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

$= H(\{\vec a_1, \vec a_2\})$ = Lin Hülle von $\{\vec a_1, \vec a_2\}$

EZS von V_2 ist $\{\vec a_1, \vec a_2\}$

Dez 5-08:40

$\vec a_1 \parallel \vec a_2 \parallel \vec a$

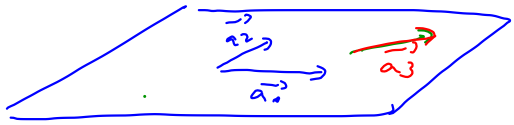


$$\Rightarrow \vec v = \lambda_1 \vec a_1 + \lambda_2 \vec a_2 = \lambda \vec a$$

$$\Rightarrow V_2 = V_1$$

$$H(\{\vec a_1, \vec a_2\}) = H(\{\vec a\}) = H(\{\vec a_1\})$$

Dez 5-08:51



$$\vec{a}_3 = \mu_1 \vec{a}_1 + \mu_2 \vec{a}_2$$

$$V_3 = H(\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\})$$

$$= \{\vec{v} \mid \vec{v} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3, \ \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

$$= V_2 = H(\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}) = H(\{\vec{a}_1, \vec{a}_3\})$$

Dez 5-08:57

Lineare Hüllen sind VR bzgl. der Operationen $+, \cdot$

$\vec{0} \in V$ $\quad \exists \vec{0} : \forall \vec{v} \in V : \vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$

$\forall \vec{v} \in V \ \exists \vec{v}^* \in V : \vec{v} + \vec{v}^* = \vec{0}$

usw. u.s.f.

Bsp: Was ist keine LH?

$$V = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = \begin{pmatrix} t \\ t+\mu \\ 0 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Dez 5-09:03

$$V_2 = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = \begin{pmatrix} t+1 \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} t \in \mathbb{R}, \\ \mu \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\}$$

Geben Sie ggf. ein EZS von V_i an!

<u>Lösung:</u> <u>V1:</u>

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} t \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix} //$$

$$V_1 = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad t, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= H\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

Dez 5-09:07

<u>V2:</u>

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad t, \mu \in \mathbb{R}$$

$$= \underbrace{(t+1)}_{\lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t+1) \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$V_2 = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= H\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

Dez 5-09:12

$$V3 := \left\{ \vec{v} \;\middle|\; \vec{v} = \begin{pmatrix} t+2 \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix} \quad t, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{(t+2)}_{\lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \underline{V3 = V2} = H\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

Dez 5-09:16

$$V4 = \left\{ \vec{v} \;\middle|\; \vec{v} = \begin{pmatrix} t+3 \\ \mu+1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mu, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\vec{v} = \underbrace{(t+3)}_{\lambda_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{(\mu+1)}_{\lambda_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$$

$$V4 = \left\{ \vec{v} \;\middle|\; \vec{v} = \lambda_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

f. $\lambda_0 = 1$

kein LH und kein VR

Dez 5-09:22

Bsp: Aufg. 4.5 S. 91

gg: $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{a_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\vec{a_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

a)

Ges: 1 LK

$\vec{v} = 5 \cdot \vec{a_1} + 3 \cdot \vec{a_3} + 0 \cdot \vec{a_2}$

$= \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

Dez 5-09:26

b) Stellen Sie den Vektor $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ als LK von $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, $\vec{a_3}$ dar!

gs: Alle $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ mit

$\vec{0} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a_3}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 2\lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3\lambda_2 \\ \lambda_2 \\ -2\lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_3 \\ -\lambda_3 \end{pmatrix}$

Dez 5-09:29

$\Leftrightarrow$

$$0 = \lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3 \quad (1)$$
$$0 = \lambda_2 + \lambda_3 \quad (2)$$
$$0 = 2\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 \quad (3)$$

Eine Gleichung hernehmen ((2)) und nach einer Unbekannten umstellen:

$(2) \Rightarrow \underline{\lambda_3 = -\lambda_2}, \quad (2'')$

Die dann in die verbleibenden Gleichungen einsetzen:

Dez 5-09:32

$\Leftrightarrow$

$$0 = \lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_2 \quad (1')$$
$$\checkmark\ 0 = 0 \quad (2')$$
$$0 = 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_2 \quad (3')$$

$\Leftrightarrow$

$$0 = \lambda_1 - 4\lambda_2 \quad (1'')$$
$$0 = 2\lambda_1 - \lambda_2 \quad (3'')$$

wieder eine eine Gleichung hernehmen und nach einer Unbekannten umstellen:

$\underline{\lambda_1 = 4\lambda_2} \quad (1''')$

$\Rightarrow 0 = 2(4\lambda_2) - \lambda_2 \quad (3''')$
$= 7\lambda_2$

Dez 5-09:34

$(1), (2), (3)$

$$\Longleftrightarrow \quad \lambda_1 = 4\lambda_2 \qquad (1''')$$

$$0 = \frac{0}{7} = \lambda_2 \qquad (3''')$$

$$\lambda_3 = -2\lambda_2 \qquad (2''')$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underline{\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0}$$

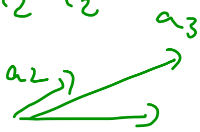
$\Rightarrow$ Die $\vec{0}$ kann nur auf triviale Weise durch $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ erzeugt werden.

Dez 5-09:37

$\Rightarrow$ D.h. $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ liegen nicht in einer Ebene!

Angenommen sie würden in einer Ebene liegen, dann würde gelten: $\exists \mu_1 \neq 0, \mu_2 \neq 0$

$$\vec{a_3} = \mu_1 \vec{a_1} + \mu_2 \vec{a_2}$$



$$\Rightarrow \vec{0} = \underbrace{\mu_1}_{\lambda_1} \vec{a_1} + \underbrace{\mu_2}_{\lambda_2} \vec{a_2} + \underbrace{\overset{a_1}{(-1)}}_{\lambda_3} \vec{a_3}$$

Dez 5-09:41

das bedeutet, dass man $\vec{0}$ auf nicht triviale Weise

für $\lambda_1 = \mu_1,\ \lambda_2 = \mu_2,\ \lambda_3 = -1 \neq 0$

darstellen kann. Und

das hatten wir oben

bereits gezeigt, dass das nicht

geht, die $\vec{0}$ kann nur

auf triviale Weise dargestellt

werden.

Dez 5-09:43