MST	Lösung zu Übung 10 Mathematik I Matrizen, Rang, Gausscher Algorithmus Prof. Dr.B.Grabowski

Zu Aufgabe 1

Der Rang einer Matrix ist gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilen- bzw. Spaltenvektoren dieser Matrix

Zu Aufgabe 2

Geben Sie den Rang der folgenden Matrizen A – E durch „Draufschauen" an !

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:
rg(A)=1 (nur eine Zeile), $rg(B) = 1$ (nur eine Spalte),
$rg(C) = 3$ (Diagonalform), $rg(D) = 4$ (Diagonalform), $rg(E) = 2$ (Diagonalform).

Zu Aufgabe 3

Bestimmen Sie den Rang folgender Matrizen:

$$a) A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad b) B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 7 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Zu a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{Z1 mit Z3 vertauschen}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} Z2' = Z2 - 3Z1 \\ Z3' = Z3 - 2Z1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow rg(A) = 3$$

MST	Lösung zu Übung 10 Mathematatik I Matrizen, Rang, Gausscher Algorithmus Prof. Dr.B.Grabowski

Zu b)

$$\begin{pmatrix}4&1&2&7\\1&2&4&1\\2&4&3&2\\7&1&2&6\end{pmatrix} \text{ Z1 mit Z2 vertauschen } \Rightarrow \begin{pmatrix}1&2&4&1\\4&1&2&7\\2&4&3&2\\7&1&2&6\end{pmatrix}\begin{matrix}\\Z2-4Z1\\Z3-2Z1\\Z4-7Z1\end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1&2&4&1\\0&-7&-14&3\\0&0&-5&0\\0&-13&-26&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}\\\\ \\-\frac{13}{7}Z2+Z4\end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1&2&4&1\\0&-7&-14&3\\0&0&-5&0\\0&0&0&-\frac{46}{7}\end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg(B)=4}$$

Zu Aufgabe 4

Untersuchen Sie mittels GA, ob folgende 4 Vektoren linear unabhängig sind!

$$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix},\quad \vec{a}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \vec{a}_3=\begin{pmatrix}0\\2\\-2\\4\end{pmatrix},\quad \vec{a}_4=\begin{pmatrix}3\\6\\1\\8\end{pmatrix}$$

Lösung:

Schreibt man die Vektoren als Zeilen (!), dann lautet die zu untersuchende Matrix:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\1&0&1&0\\0&2&-2&4\\3&6&1&8\end{pmatrix}$$

.Wir bestimmen den Rang von A indem wir die Matrix durch geschickte

Anwendung erlaubter (d.h. den Rang nicht ändernder) Operationen diagonalisieren:

$$\text{A} = \begin{pmatrix}1&2&1&2\\1&0&1&0\\0&2&-2&4\\3&6&1&8\end{pmatrix}\begin{matrix}\\-Z1\\ \\-3Z1\end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&-2&0&-2\\0&2&-2&4\\0&0&-2&2\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\+Z2\\ \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-2&0&-2\\0&0&-2&2\\0&0&-2&2\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\-Z3\end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-2&-2&-4\\0&0&-2&2\\0&0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow rg(A)=3$$

Das heißt, die 4 Vektoren sind nicht linear unabhängig!

MST	Lösung zu Übung 10 Mathematik I Matrizen, Rang, Gausscher Algorithmus Prof. Dr.B.Grabowski

Zu Aufgabe 5
Welche Dimension besitzt der folgende Vektorraum?

$$V = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_4 \in R \right\}$$

Begründen Sie Ihre Antwort!

__**Lösung:**__

Wir schreiben die 4 erzeugenden Vektoren zeilenweise in eine Matrix A. Mittels GA zur Rangbestimmung erhält man: rg(A) = 3. Demzufolge sind 3 Erzeugendenvektoren linear unabhängig und bilden damit eine Basis in V. Demzufolge ist dim(V)=3.

Zu Aufgabe 6

Zu a)

1. Schritt:
 Wir wenden die 2 Operationen (ohne zu Vertauschen!!!) des GA zur Rangbestimmung auf die Zeilen der Matrix (A:$E_{(4)}$) an!

$$(A : E_{(4)}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2Z2 + Z1 \\ 2Z3 - Z1 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -4 & | & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 2 & | & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 2Z3 - Z2 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -4 & | & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 8 & | & -3 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Schritt:

Wir wenden nun die 3 Operationen des GA zur Rangbestimmung von unten nach oben auf die Zeilen dieser Matrix an, und machen den ersten Teil der Matrix zu einer Diagonalmatrix:

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -4 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 8 & -3 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ Z2+2Z4 \\ Z3-4Z4 \\ \\ \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & -3 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} 9Z1+Z3 \\ 3Z2+Z3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 18 & 0 & 0 & 0 & 6 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & -3 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

3. Schritt:

Wir teilen nun jede Zeile durch das Diagonalelement der vorderen Matrix und machen diese so zur Einheitsmatrix:

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 18 & 0 & 0 & 0 & 6 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & -3 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} /18 \\ /12 \\ /-9 \\ /2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & -1/9 & 2/9 & -2/9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & 2/9 & -4/9 & 4/9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$$

Die Inverse A^{-1} von A ist nun durch den hinteren Teil der Ergebnismatrix gegeben:

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/9 & 2/9 & -2/9 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 2/9 & -4/9 & 4/9 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & 6 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Zu b) Probe:

$$\Rightarrow A^{-1} \cdot A = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & 6 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(O.K.)}$$