MST Lösungen zu Übung 13
Mathematik 2

Prof.Dr.B.Grabowski e-mail: grabowski@htw-saarland.de Tel.: 5867-424

Determinanten und ihre Eigenschaften

Zu Aufgabe 1:

Wir bringen A durch den GA auf Diagonalgestalt und berücksichtigen dabei aber die in der Aufgabenstellung genannten 3 Regeln zur Determinantenberechnung:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ Z3+2Z1 \\ Z4+Z1 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -10 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \textit{Vertauschung } 2.\textit{und}\, 5.\textit{Zeile}$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -10 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ Z3+2Z2 \\ Z4+3Z2 \\ \\ \end{matrix} = (-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \textit{Vertauschung } 3.\textit{und}\, 5.\textit{Zeile}$$

$$= (-1)(-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ Z5+8Z4 \end{matrix} \quad = (-1)(-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 52 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(-1)[(-1)(-1)\cdot 1\cdot 1\cdot 52 = 52$$

Zu Aufgabe 2:

$$\text{Seien} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Geben Sie die Lösung x_3 des Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ an!

Hinweis: Hier ist nicht die gesamte Lösung gefragt. Deshalb macht sich hier die Cramersche Regel ganz gut!

Lösung:
Wir können feststellen, dass die Determinante von A ungleich 0 ist:

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} Z1 <-> Z2 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ Z2-2Z1 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ Z3 <-> Z2 \\ \\ \end{matrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ Z3+5Z2 \\ Z4-Z2 \end{matrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ Z4-Z3/10 \end{matrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9/10 \end{pmatrix}$$

$$= 9$$

Damit ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar und wir können x_3 mittels Cramerscher Regel bestimmen:

$$x_3 = \frac{\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{\det(A)} \underset{\substack{\text{Entwicklung} \\ \text{nach 4.Zeile}}}{=} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{9} = \frac{1+6}{9} = \frac{7}{9}$$

Zu Aufgabe 3:

Seien $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 3 Vektoren aus dem R3 mit det($\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$) = 10.

Seien $\vec{b}_1 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \vec{b}_2 = -\vec{a}_3, \vec{b}_3 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$ 3 neue Vektoren.

Berechnen Sie die Determinante $\det(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. Sind diese 3 neuen Vektoren linear unabhängig (Begründung)?

Lösung:
Aus den Linearitäts- und den anderen 3 in Aufgabe 3) genannten Eigenschaften von Determinanten folgt:

$$
\begin{aligned}
\det(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) &= \det(2\vec{a}_1 - \vec{a}_2, -\vec{a}_3, \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3) \\
&\underset{\textit{Linearität}}{=} 2\det(\vec{a}_1, -\vec{a}_3, \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3) - \det(\vec{a}_2, -\vec{a}_3, \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3) \\
&\underset{\textit{Linearität}}{=} -2\det(\vec{a}_1, \vec{a}_3, \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3) + \det(\vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3) \\
&\underset{\textit{Linearität}}{=} -2[\det(\vec{a}_1, \vec{a}_3, \vec{a}_1) + \det(\vec{a}_1, \vec{a}_3, \vec{a}_2) + \det(\vec{a}_1, \vec{a}_3, \vec{a}_3)] \\
&\qquad + \det(\vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_1) + \det(\vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_2) + \det(\vec{a}_2, \vec{a}_3, a_3) \\
&\underset{\substack{\textit{Spalten} \\ l\ln ear \\ \textit{abhängig}}}{=} -2[0 + \det(\vec{a}_1, \vec{a}_3, \vec{a}_2) + 0] + \det(\vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_1) + 0 + 0 \\
&= -2\det(\vec{a}_1, \vec{a}_3, \vec{a}_2) + \det(\vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_1) \\
&\underset{\substack{\textit{Vertauschung} \\ \textit{von} \\ \textit{Spalten}}}{=} -(-2\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)) - \det(\vec{a}_1, \vec{a}_3, \vec{a}_2) \\
&\underset{\substack{\textit{Vertauschung} \\ \textit{von} \\ \textit{Spalten}}}{=} -(-2\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)) - (-\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)) \\
&= 3\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \\
&= 30
\end{aligned}
$$

Die 3 Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ sind – weil ihre Determinante ungleich 0 ist- linear unabhängig!

Inverse Matrizen

Die Lösungen zu Aufgabe 4-7 werden in der Übung besprochen!