HTW	Lösungen zu Übung 7 MST Mathematik I LK’s, Lineare Unabhängigkeit und EZS Prof. Dr.B.Grabowski

Zu Aufgabe 1

Zu a) Geben Sie die Menge V aller Vektoren im R^3 an, die parallel zu Ebenen mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ verlaufen!

<u>Lösung:</u>

V enthält offensichtlich alle Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$, die senkrecht auf dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ stehen, also die Gleichung

$\vec{v} \cdot \vec{n} = v_x - v_y + v_z = 0 \quad (1)$

erfüllen.

Legen wir 2 Komponenten z.B. v_x und v_y beliebig fest, so ergibt sich daraus die dritte:

$v_x = \lambda$
$v_y = \mu$
$\rightarrow\ v_z = -\lambda + \mu$

Daraus ergibt sich: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ -\lambda + \mu \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

$$V = \left\{ \vec{v} \in R^3 \mid \vec{v} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in R \right\}.$$

Zu b) Geben Sie mindestens 2 verschiedene Erzeugendensysteme (EZS) von V an! Wie groß muss die Anzahl der Erzeugendenvektoren von V wohl mindestens sein?

Lösung:

Die Lösung ist nicht eindeutig, z.B. ist E1= $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ EZS von V.

Aber auch E2= $\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ ist EZS von V (Erhalten wir, indem wir in (1) $v_z = \lambda$ und $v_y=\mu$ setzen ($\rightarrow$ $v_x= - \lambda + \mu$).

Es sind mindestens 2 nichtparallele Vektoren für die Erzeugung von V notwendig .

Zu Aufgabe 2

Zu a) Auf welche Weise kann $\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ aus $\vec{a_1} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{a_2} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ als LK erzeugt werden?

Lösung: $\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix} = 4\vec{a_1} - 2\vec{a_2}$.

Zu b) Auf welche Weise kann $\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ aus $\vec{a_1} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{a_2} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ als LK erzeugt werden?

Lösung:
Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \iff \begin{array}{rcll}4 & = & \lambda_1 & \\ -2 & = & \lambda_1 & +\lambda_2\end{array} \implies \lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = -6$.

$\implies \vec{v} = \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix} = 4\vec{a_1} - 6\vec{a_2}$.

Zu c) Auf welche Weise kann $\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ aus $\vec{a_1} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{a_2} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{a_3} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ als LK erzeugt werden?

Lösung:
Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \iff \begin{array}{rclll}4 & = & \lambda_1 & +\lambda_2 & \\ -2 & = & \lambda_1 & & +\lambda_3\end{array}$

Wir stellen die erste Gleichung nach λ_2 und die zweite Gleichung nach λ_3 um und erhalten:
$$\begin{array}{rcl}\lambda_2 & = & 4-\lambda_1\\ \lambda_3 & = & -2-\lambda_1\end{array}$$

Wir können λ_1 beliebig festlegen und erhalten damit unendlich viele Lösungen dieses Systems von zwei Gleichungen. Z.B. erhalten wir für $\lambda_1 = 0$ die Werte $\lambda_2 = 4$ und $\lambda_3 = -2$.

Es gibt folglich unendlich viele Möglichkeiten zur Darstellung von $\vec{v}$, eine davon ist:

$\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix} = 4\vec{a_2} - 2\vec{a_3}$.

Zu Aufgabe 3

Zu a)

Geben Sie eine LK der Vektoren $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ an, aus der sich der Vektor $\vec{v}=\begin{pmatrix}-4\\10\\8\end{pmatrix}$ erzeugen lässt!

Lösung:

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}-4\\10\\8\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

ist nach λ_1, λ_2, λ_3 aufzulösen:

$$\begin{aligned}-4 &= -\lambda_1+\lambda_2 && (1)\\ 10 &= \lambda_1 \qquad +2\lambda_3 && (2)\\ 8 &= \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3 && (3)\end{aligned}$$

(1) nach λ_2 und (2) nach λ_3 umstellen ergibt:

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= \lambda_1-4 && (1')\\ \lambda_3 &= 5-\frac{\lambda_1}{2} && (2')\end{aligned}$$

(1') und (2') in (3) eingesetzt ergibt:

$$8=\lambda_1-\lambda_1+4+5-\frac{\lambda_1}{2}\Leftrightarrow 8=9-\lambda_1/2\Leftrightarrow \lambda_1=2$$

Dieses Ergebnis wieder in (1') und (2') eingesetzt ergibt: $\begin{aligned}\lambda_2&=-2\\ \lambda_3&=4\end{aligned}$

Damit ergibt sich das Ergebnis:

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}-4\\10\\8\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

Zu b) Stellen Sie den Nullvektor als nichttriviale LK der 4 in a) gegebenen Vektoren dar!
!

Lösung: $\vec{0} = -\begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zu Aufgabe 4

a) Prüfen Sie, auf welche Weisen (nur trivial oder auch nichtrivial) Sie den Nullvektor $\vec{0}$ als LK der folgenden Vektormengen erzeugen können, geben Sie die jeweiligen LK' s an:

Zu a1) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$:

$$\vec{0} = \lambda_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{llllr} 0 = & \lambda_1 & & +\lambda_3 & (1) \\ 0 = & 2\lambda_1 & +\lambda_2 & & (2) \\ 0 = & \lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & (3) \end{array}$$

Aus (1) folgt: $\lambda_3 = -\lambda_1$ (1')
Aus (2) folgt: $\lambda_2 = -2\lambda_1$ (2')
(1') und (2') in (3) eigesetzt ergibt: $0 = \lambda_1 - \lambda_1 - 2\lambda_1 = -2\lambda_1 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0$
Daraus folgt wiederum wegen (1') und (2'): $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

D.h., der Nullvektor ist im Fall a1) nur auf triviale Weise durch LK erzeugbar:

$$\vec{0} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zu a2) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$:

$$\vec{0} = \lambda_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{llllr} 0 = & \lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & (1) \\ 0 = & 2\lambda_1 & +\lambda_2 & & (2) \\ 0 = & \lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & (3) \end{array}$$

Aus (1) folgt: $\lambda_3 = -\lambda_1 - \lambda_2$ (1')
Aus (2) folgt: $\lambda_2 = -2\lambda_1$ (2')
(2') in (1') eingesetzt ergibt: $\lambda_3 = -\lambda_1 + 2\lambda_1 = \lambda_1$ (1'')
(1'') und (2') in (3) eigesetzt ergibt: $0 = \lambda_1 - 2\lambda_1 + \lambda_1 = 0$, was uns Nichts neues bringt.

Wir erhalten also:

$\lambda_2 = -2\lambda_1$, $\lambda_3 = \lambda_1$ und λ_1 kann beliebig gewählt werden, z.B. $\lambda_1 = \mu$.

Damit ist der Nullvektor im Fall a2) auch auf nichttriviale Weise darstellbar, es gilt:

$$\vec{0} = \mu\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} - 2\mu\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad , \quad \mu \in R \quad \text{beliebig.} \quad (*)$$

Zu b) In welchem der beiden Fälle (a1) oder a2)) kann man einen der 3 Vektoren als LK der beiden anderen darstellen?

Im Falle a2, wenn der Nullvektor auf nicht triviale Weise erzeugbar ist.
Aus (*) folgt:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Zu c) Formulieren Sie einen Zusammenhang zwischen den folgenden beiden Aussagen p und q:

p = 3 beliebige Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in R^3$ (ungleich dem 0-Vektor) liegen nicht in einer Ebene
q = Der Nullvektor lässt sich durch LK der 3 Vektoren nur auf triviale Weise darstellen
(d.h., $\vec{0} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$)
Begründen Sie diesen Zusammenhang!

Lösung:

Es gilt: p $\Leftrightarrow$ q, d.h.
3 beliebige Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in R^3$ (ungleich dem 0-Vektor) liegen nicht in einer Ebene
$\Leftrightarrow$ Der Nullvektor lässt sich durch LK der 3 Vektoren nur auf triviale Weise darstellen
(d.h., $\vec{0} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$)

Begründung: Siehe Vorlesung

Zu d) Begründen Sie, warum bei mehr als 3 Vektoren im R^3 (ungleich dem 0-Vektor) stets ein Vektor dabei ist, der sich durch die anderen als LK darstellen lässt!

Begründung: Siehe Vorlesung

Zu Aufgabe 5

a) Wie müssen 2 Vektoren im R^3 zueinander liegen, die linear abhängig sind, wie liegen sie zueinander, wenn sie linear unabhängig sind?

b) Prüfen Sie mit Hilfe eines der 3 Vektorprodukte (Skalar-, Kreuz-, Spatprodukt), ob $\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ linear unabhängig sind!

c) Wie müssen 3 Vektoren im R^3 zueinander liegen, die linear abhängig sind? Wie liegen sie, wenn sie linear unabhängig sind?

d) Prüfen Sie mit Hilfe eines der 3 Vektorprodukte (Skalar-, Kreuz-, Spatprodukt), ob die Mengen M1 und M2 jeweils linear abhängige oder linear unabhängige Vektoren enthalten!

$$M1 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} \right\} \quad , \quad M2 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix} \right\}.$$

e) Sind die 4 Vektoren aus $M3 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} \right\}$ linear abhängig oder linear unabhängig?

(Begründung angeben!)

Lösung: Siehe Vorlesung!

Zu Aufgabe 6

Sei R^3 die Menge aller Vektoren mit 3 Komponenten und R^4 die Menge aller Vektoren mit 4 Komponenten.

- **a)** Geben Sie 2 linear unabhängige Vektoren im R^3 an!
- **b)** Geben Sie 3 linear unabhängige Vektoren im R^3 an!
- **c)** Geben Sie 3 linear abhängige Vektoren im R^3 an!
- **d)** Geben Sie 4 linear abhängige Vektoren im R^3 an!
- **e)** Geben Sie 4 linear unabhängige Vektoren im R^4 an!

Lösung: Die Lösungen sind nicht eindeutig.
Mögliche Lösungen sind:

Zu a) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ **Zu b)** $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Zu c) $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$ (Der 3. Ist die Resultierende der beiden ersten Vektoren)

Zu d) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ (4 Vektoren im R^3 sind immer linear abhängig!)

Zu e) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

Zu Aufgabe 7
Untersuchen Sie, ob folgende Vektoren linear unabhängig sind:

a) $\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/2\\1\\3/2\end{pmatrix}$

Lösung:

Zu a) Für das Spatprodukt gilt:
$[\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}]=0$. D.h., die 3 Vektoren liegen in einer Ebene. D.h., sie sind nicht linear unabhängig!

Zu b) Für das Kreuzprodukt gilt: $\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}-1/2\\1\\3/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\0\\2\end{pmatrix}\neq\vec{0}$. Demzufolge sind die beiden Vektoren nicht parallel, d.h., sie sind linear unabhängig!

Zu Aufgabe 8

a) k Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k$ sind linear unabhängig, falls gilt:

„aus $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + ... + \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0}$ folgt: $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0$".

Untersuchen Sie mit diesem Kriterium, ob folgende Vektoren linear unabhängig sind:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Es gilt: $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 + \lambda_4 \vec{a}_4 = \vec{0}$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{ccccccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & + & 3\lambda_4 & = & 0 & (1) \\ & & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & + & 6\lambda_4 & = & 0 & (2) \\ & & & - & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & 0 & (3) \\ & & & & & & 4\lambda_4 & = & 0 & (4) \end{array}$$

Dieses diagonalförmige Gleichungssystem können wir schrittweise von unten (4) nach oben (1) lösen, es ergibt sich als einzige Lösung:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0 \, .$$

Folglich gilt:

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 + \lambda_4 \vec{a}_4 = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0 \, .$$

Demzufolge sind die 4 Vektoren a) linear unabhängig!

Zu b)

Was könne Sie aus a) ableiten? Warum sind k Vektoren der Gestalt:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad , \vec{a}_k = \begin{pmatrix} a_{k1} \\ a_{k2} \\ a_{k3} \\ \vdots \\ a_{k,k-1} \\ a_{kk} \end{pmatrix}$$ mit $a_{ij} \neq 0$ für alle i und j

linear unabhängig?

Lösung:

Diagonalgestalt, d.h. der 1. Vektor hat Komponenten, die alle bis auf die erste gleich 0 sind ; daraus folgt λ_1=0 und jeder weitere Vektor $\vec{a}_i$ hat eine 0 weniger als Komponente als der vorherige Vektor; daraus folgt, dass das zugehörige λ_i=0 ist. .

Zu Aufgabe 9

3 Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sind linear unabhängig, falls gilt:

„aus $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 = \vec{0}$ folgt: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ “.

Seien $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 3 linear unabhängige Vektoren. Seien $\vec{b}_1 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$, $\vec{b}_2 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_3$, $\vec{b}_3 = \vec{a}_2 + \vec{a}_3$.

Untersuchen Sie unter Verwendung der obigen Definition der linearen Unabhängigkeit, ob $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ linear unabhängig sind!

Lösung:

$$\lambda_1\vec{b}_1 + \lambda_2\vec{b}_2 + \lambda_3\vec{b}_3 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \lambda_1(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) + \lambda_2(2\vec{a}_1 - \vec{a}_3) + \lambda_3(\vec{a}_2 + \vec{a}_3) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 + 2\lambda_2)\vec{a}_1 + (\lambda_1 + \lambda_3)\vec{a}_2 + (\lambda_3 - \lambda_2)\vec{a}_3 = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ Wegen der Linearen Unabhängigkeit von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ muss gelten:

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$$
$$\lambda_1 + \lambda_3 = 0$$
$$\lambda_3 - \lambda_2 = 0$$

Wir lösen das GS schrittweise auf und erhalten dann $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

D.h., $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ sind linear unabhängig.