MST Übung 13 Mathematik 1

Prof.Dr.B.Grabowski e-mail: grabowski@htw-saarland.de Tel.: 5867-424

Determinanten und ihre Eigenschaften

Aufgabe 1:

Angenommen die Matrix A hat eine Dreiecksgestalt: det(A)= $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Nach Laplace'schem Entwicklungssatz würden wir diese Determinante nach der 1. Spalte entwickeln:

det(A)= $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$

dann würden wir wiederum nach der 1. Spalte entwickeln, u.s.w, u.s.f und wir erhalten:

det(A)= $a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{nn}$

D.h., die Determinante einer Dreiecksmatrix ist gleich dem Produkt ihrer Diagonalelemente.

Determinanten kann mann auch mittels Gausschen Algorithmus (GA) berechnen, indem man durch den GA die Matrix A auf Diagonalgestalt bringt.

Im Gegensatz zur Rangberechnung muss man nun allerdings beachten, dass eine Vertauschung von 2 Spalten oder von 2 Zeilen eine Vorzeichenänderung der Determinante bewirkt.

Regeln zur Anwendung des Gausschen Algorithmus auf die Determinantenberechnung:

1) Vertauschung von 2 Spalten oder von 2 Zeilen bewirkt eine Vorzeichenänderung der Determinante.
2) Die Addition des Vielfachen einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte) verändert den Wert der Determinante nicht.
3) Die Multiplikation einer Zeile (Spalte) mit einem Skalar λ ändert den Wert der Determinante um den Faktor λ

Aufgabe:
Berechnen Sie den Wert der nachstehenden Determinante mittels Gausschem Algorithmus

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 2:

Seien $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

Geben Sie die Lösung x_3 des Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ an, indem Sie die Cramersche Regel anwenden!

Aufgabe 3:

Seien $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 3 Vektoren aus dem R3 mit $\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = 10$.

Seien $\vec{b}_1 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \vec{b}_2 = -\vec{a}_3, \vec{b}_3 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$ 3 neue Vektoren.

Berechnen Sie die Determinante $\det(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. Sind diese 3 neuen Vektoren linear unabhängig (Begründung)?

<u>Inverse Matrizen</u>

Aufgabe 4:

Berechnen Sie die Inverse Matrix zu folgenden Matrizen

1. Mittels Adjungierter Matrix
2. Mittels Gausschem Algorithmus
3. Prüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie jeweils AA^{-1} berechnen!

a) $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ b) diag(-1,1,-1,1,-1,1) c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5:

Warum kann man die Inverse der folgenden Matrizen nicht berechnen?

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -1 \\ 7 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6:

Lösen Sie folgendes lineare GS mittels inverser Koeffizienten-Matrix A^{-1}!

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = -1$$
$$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 0$$
$$x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$$
$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -2$$

Aufgabe 7:

Seien A= $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -1 \\ 7 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, C=diag(-1,1,3), D= $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie die Matrix F, für die gilt: $F \cdot (A \cdot B^T - D) = C$