HTW	Übung 7 MST Mathematik I LK's und Lineare Unabhängigkeit Prof. Dr.B.Grabowski

Aufgabe 1

a) Geben Sie die Menge V aller Vektoren im R^3 an, die parallel zu Ebenen mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ verlaufen!

b) Geben Sie mindestens 2 verschiedene Erzeugendensysteme (EZS) von V an! Wie groß muss die Anzahl der Erzeugendenvektoren von V wohl mindestens sein?

Aufgabe 2

a) Auf welche Weise kann $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ aus $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{a_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als LK erzeugt werden?

b) Auf welche Weise kann $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ aus $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{a_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als LK erzeugt werden?

c) Auf welche Weise kann $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ aus $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{a_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als LK erzeugt werden?

Aufgabe 3

a) Geben Sie eine LK der Vektoren $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ an, aus der sich der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$ erzeugen lässt!

b) Stellen Sie den Nullvektor als nichttriviale LK der 4 in a) gegebenen Vektoren dar!

Aufgabe 4

Prüfen Sie, auf welche Weisen (nur trivial oder auch nichttrivial) Sie den Nullvektor $\vec{0}$ als LK der folgenden Vektormengen erzeugen können, geben Sie die jeweiligen LK' s an:

a1) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ a2) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

b) In welchem der beiden Fälle (a) oder b)) kann man einen der 3 Vektoren als LK der beiden anderen darstellen?

c) Formulieren Sie einen Zusammenhang zwischen den folgenden beiden Aussagen p und q:

p = 3 beliebige Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in R^3$ (ungleich dem 0-Vektor) liegen nicht in einer Ebene
q = Der Nullvektor lässt sich durch LK der 3 Vektoren nur auf triviale Weise darstellen

(d.h., $\vec{0} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$)
Begründen Sie diesen Zusammenhang!

d) Begründen Sie, warum bei mehr als 3 Vektoren im R^3 (ungleich dem 0-Vektor) stets ein Vektor dabei ist, der sich durch die anderen als LK darstellen lässt!

Aufgabe 5

a) Wie müssen 2 Vektoren im R^3 zueinander liegen, die linear abhängig sind, wie liegen sie zueinander, wenn sie linear unabhängig sind?

b) Prüfen Sie mit Hilfe eines der 3 Vektorprodukte (Skalar-, Kreuz-, Spatprodukt), ob $\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ linear unabhängig sind!

c) Wie müssen 3 Vektoren im R^3 zueinander liegen, die linear abhängig sind? Wie liegen sie, wenn sie linear unabhängig sind?

d) Prüfen Sie mit Hilfe eines der 3 Vektorprodukte (Skalar-, Kreuz-, Spatprodukt), ob die Mengen M1 und M2 jeweils linear abhängige oder linear unabhängige Vektoren enthalten!

$$M1 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} \right\} \quad , \quad M2 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix} \right\}.$$

e) Sind die 4 Vektoren aus $M3 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} \right\}$ linear abhängig oder linear unabhängig?

(Begründung angeben!)

Aufgabe 6
Sei R^3 die Menge aller Vektoren mit 3 Komponenten und R^4 die Menge aller Vektoren mit 4 Komponenten.

- **a)** Geben Sie 2 linear unabhängige Vektoren im R^3 an!
- **b)** Geben Sie 3 linear unabhängige Vektoren im R^3 an!
- **c)** Geben Sie 3 linear abhängige Vektoren im R^3 an!
- **d)** Geben Sie 4 linear abhängige Vektoren im R^3 an!
- **e)** Geben Sie 4 linear unabhängige Vektoren im R^4 an!

Aufgabe 7
Untersuchen Sie, ob folgende Vektoren linear unabhängig sind:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 8
a) Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k$ sind linear unabhängig, falls gilt:

„aus $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + ... + \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0}$ folgt: $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0$".

Untersuchen Sie mit diesem Kriterium, ob folgende Vektoren linear unabhängig sind:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b) Warum sind k Vektoren der Gestalt:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad , \vec{a}_k = \begin{pmatrix} a_{k1} \\ a_{k2} \\ a_{k3} \\ \vdots \\ a_{k,k-1} \\ a_{kk} \end{pmatrix}$$ mit $a_{ij} \neq 0$ für alle i und j

linear unabhängig?

Aufgabe 9
Seien $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 3 linear unabhängige Vektoren.
Seien $\vec{b}_1 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$, $\vec{b}_2 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_3$, $\vec{b}_3 = \vec{a}_2 + \vec{a}_3$.

Untersuchen Sie unter Verwendung des in Aufgabe 5) genannten Kriteriums, ob $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ linear unabhängig sind!