| MST | Übung 8 Mathematik I<br>Prof. Dr.B.Grabowski<br>Vektorräume, affine Räume, Lineare Unabhängigkeit, Basen, Dimensioni |
|---|---|

**Aufgabe 1**

- **a)** Geben Sie eine Basis im $R^3$ an!
- **b)** Geben Sie eine Basis im $R^4$ an!
- **c)** Geben Sie mindestens 2 Erzeugendensysteme des $R^3$ an, die keine Basis sind!

**Aufgabe 2**

Welche der 4 Mengen von Vektoren bilden keine Basis im $R^3$? (Begründung!)

$$M0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad M1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\},$$

$$M2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}, \qquad M3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}.$$

**Aufgabe 3**

Welche der folgenden Mengen V von Vektoren ist kein Vektorraum?
Geben Sie die Begründung dafür an!
Geben Sie im Falle, dass es sich bei V um einen Vektorraum handelt, V als Lineare Hülle eines EZS an, das heißt, geben Sie das EZS an und stellen Sie V als Menge aller LK's dar, die durch das EZS gebildet werden können!

a) $\mathrm{V} = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = \begin{pmatrix} t + 2\mu + 1 \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t, \mu \in R \right\}$

b) $\mathrm{V} = \{\vec{0}\}$

c) $\mathrm{V} = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = \begin{pmatrix} t + 2\mu + 1 \\ \mu \\ 1 + t \end{pmatrix}, \quad t, \mu \in R \right\}$

d) $\mathrm{V} = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = \begin{pmatrix} t + 2\mu + 1 \\ \mu \\ 2 + t \end{pmatrix}, \quad t, \mu \in R \right\}$

e) $\mathrm{V} = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = \begin{pmatrix} t + 2\mu + 1 \\ 2\mu - 1 \\ 2 + t \end{pmatrix}, \quad t, \mu \in R \right\}$

f) $V = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = \begin{pmatrix} t + 2\mu + 1 \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t, \mu \in R^{\geq 0} \right\}$

**Aufgabe 4**
Wir betrachten Funktionen mit den reellen Zahlen als Definitionsbereich. Die Operationen + (Addition zweier Funktionen) und · (Multiplikation einer Funktion mit einem Skalar) seien wie folgt definiert:

(f+g)(x) := f(x) + g(x) für alle $x \in R$
$(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$ für alle $x \in R$

Auf der Basis dieser beiden Operatoren betrachten wir den Vektorraum V aller Schwingungen der Frequenz 1:

$$V = \{ f : x \in R \to f(x) \in R \mid \quad f(x) = \alpha \sin(x) + \beta \cos(x), \alpha \in R, \beta \in R \}$$

a) Zeigen Sie, dass die beiden Funktionen $f_1(x) = \sin(x)$, $f_2(x) = \cos(x)$
linear unabhängig sind, also eine Basis im Vektorraum (V, + , ·) bilden!

b) Wie groß ist die Dimension von V?

c) Zeigen Sie: zwei Schwingungen $g1(x) = \alpha_1 \sin(x) + \beta_1 \cos(x)$ und $g2(x) = \alpha_2 \sin(x) + \beta_2 \cos(x)$, $x \in R$ sind identisch für alle $x \in R$, falls die Koeffizienten übereinstimmen, d.h. falls gilt : $\alpha_1 = \alpha_2$ und $\beta_1 = \beta_2$.

**Aufgabe 5**
Wir betrachten Funktionen mit den reellen Zahlen als Definitionsbereich. Die Operationen + (Addition zweier Funktionen) und · (Multiplikation einer Funktion mit einem Skalar) seien wie folgt definiert:

(f+g)(x) := f(x) + g(x) für alle $x \in R$
$(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$ für alle $x \in R$

Auf der Basis dieser beiden Operatoren betrachten wir den Vektorraum V aller Polynome bis zur Ordnung 3
$$V = \{ f : x \in R \to f(x) \in R \mid \quad f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a, b, c, d \in R \}$$

a) Zeigen Sie, dass die 4 Funktionen $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x$, $f_4(x) = 1$
linear unabhängig sind, also eine Basis im Vektorraum (V, + , ·) bilden!

b) Wie groß ist die Dimension von V?

c) Zeigen Sie: zwei Polynome $p_1(x) = a_1 x^3 + b_1 x^2 + c_1 x + d_1$, $p_2(x) = a_2 x^3 + b_2 x^2 + c_2 x + d_2$,
bis zur Ordnung 3 sind identisch für alle $x \in R$, falls die Koeffizienten übereinstimmen, d.h. falls gilt :
$a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, d_1 = d_2$.

**Aufgabe 6**

a) Geben Sie einen konkreten affinen Raum der Dimension 1 im $R^3$ an!
b) Geben Sie einen konkreten affinen Raum der Dimension 2 im $R^3$ an!
c) Geben Sie einen konkreten affinen Raum der Dimension 3 im $R^3$ an!

**Aufgabe 7**

Welche der folgenden Mengen ist ein Vektorraum (VR), welche ein affiner Raum (AR) und welche weder noch (Begründung)? Wenn es sich um einen VR oder AR handelt, so geben Sie die Dimension des Raumes, die Basis und ggf. den Aufpunkt an!

a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} \mid \quad t \in R \right\}$ b) $M = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} \mid \quad t \in R \right\}$ c) $M = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} \mid \quad t > 0 \right\}$