Vl. 8.1.15

5.4. Rang einer Matrix

5.4.1. Was ist der Rang?

Def: Sei

$A = ((a_{ij}))_{i=1\ldots m}^{j=1\ldots n}$ eine $m \times n$-Matrix. D.h. A besteht aus n Spaltenvektoren bzw. m Zeilenvektoren:

$A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ $\quad \vec{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \vec{b}_1^T \\ \vdots \\ \vec{b}_m^T \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b}_i^T = (a_{i1} \ldots a_{in})$

1. Die Anzahl k der maximal linear unabhängigen Spaltenvektoren von A heißt Spaltenrang von A; Schreibweise: srg(A).

2. Die Anzahl l der max. linear unabh. Zeilenvektoren von A heißt Zeilenrang von A; Schreibweise: zrg(A).

Bsp.:

$$A = \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cancel{1} \\ 0 & 1 & \cancel{1} \\ 0 & 0 & \cancel{0} \end{pmatrix} \\ \vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3 \end{array}$$

$$\vec{a}_3 = 1 \cdot \vec{a}_1 + 1 \cdot \vec{a}_2$$

$\Rightarrow$ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ ist nicht l. unabh.

Aber $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ sind lin. unabh.

$$\Rightarrow \operatorname{srg}(A) = 2$$

$$A = \begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec{b}_1^T \\ \vec{b}_2^T \\ \vec{b}_3^T \end{matrix} \end{array}$$

$\vec{b}_3^T$ „gehört nicht zu l. unabh. V.“

denn $\vec{0}$-Vektor lässt sich stets aus den anderen Vektoren erzeugen:

$$\vec{b}_3^T = 0 \cdot \vec{b}_1^T + 0 \cdot \vec{b}_2^T$$

Aber $\vec{b}_1^T, \vec{b}_2^T$ sind linear unabh.

$$\Rightarrow \operatorname{zrg}(A) = 2$$

Satz: Sei A eine $m \times n$-Matrix. Dann gilt stets:

1) $zrg(A) = srg(A) =: rg(A)$

2) $rg(A) \leq \underline{\min(m,n)}$

Wir nennen $rg(A)$ Rang der Matrix A (= max. Anzahl von Zeilen- bzw. Spaltenvektoren von A)

Bsp:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2$

$m = 3, n = 2$

$(0,3) = 0 \cdot (1,2) + 3 \cdot (0,1)$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A) = 3$

$\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3$

$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \vec{0}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\lambda_2 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\lambda_3 \\ 2\lambda_3 \\ 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_3 &= 0 \end{aligned}\right) \begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\end{array}$$

$(3) \Rightarrow \lambda_3 = \frac{0}{3} = 0$

in $(2) \Rightarrow \lambda_2 + 2\cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$

in $(1) \Rightarrow \lambda_1 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ l. unabh.

$\Rightarrow rg(A) = 3$

5.4.2. Eigenschaften des Rangs einer Matrix

Bsp. A 5.12

a) $A = diag(4, 1, 7) \Rightarrow rg(A) = 3$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

c) $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(C) = 3$

e) $E = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(E) = 3$

d) $D = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & \cancel{1} \\ 0 & 1 & -1 & \cancel{2} \\ 0 & 0 & 7 & \cancel{3} \end{array}\right) \leftarrow$

$\Rightarrow rg(D) = 3$

Satz: Es gilt

1. wenn A eine $n \times n$-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ O & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad a_{ii} \neq 0 \quad \forall i = 1 \ldots n,$$

so gilt $rg(A) = n$

(Bsp. a)

2. wenn A eine $m \times n$-Matrix $(m > n)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ O & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \\ \hline O & & O \end{pmatrix} \quad a_{ii} \neq 0 \quad \forall i = 1 \ldots n,$$

so gilt $rg(A) = n$

(Bsp. c)

3. wenn A eine $m \times n$-Matrix, $m < n$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1m} & \cdots & & a_{1n} \\ O & \ddots & a_{mm} & \cdots & & a_{mn} \end{array}\right)$$

$a_{ii} \neq 0 \quad \forall i = 1 \ldots m$, so gilt $rg(A) = m$

(Bsp. d)

4. wenn A eine $m \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & & & \\ 0 & & a_{kk} & \cdots & a_{kn} \\ \hline 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$a_{ii} \neq 0 \ \forall i = 1 \ldots k$,

so gilt $rg(A) = k$

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2$$

4.

D.h. wenn die Matrix A eine der Dreiecksformen 1.–4. aus dem Satz besitzt können wir den Rang sofort ablesen.

wenn A keine Δ-Form besitzt, so kann man aber durch Anwendung von 3 Operationen die Vektoren in A umordnen, ohne den Rang von A zu verändern, solange bis A in Dreiecksgestalt vorliegt.

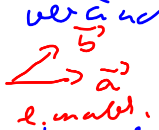
Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

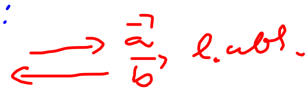
Zeilen oder Spalten von A sind vertauschbar ohne den Rang zu verändern:

$$A \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow rg(A) = rg(A^*) = 3$$

Operationen, die den $rg(A)$ nicht verändern:



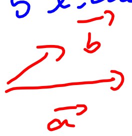


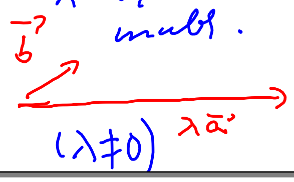
(1) Vertauschung von Zeilen (Spalten)

$\vec{a}, \vec{b}$ l. unabh. $\Rightarrow \vec{b}, \vec{a}$ l. unabh.

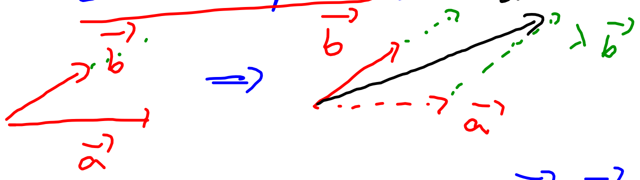
(2) Die Multipl. einer Zeile (Spalte) von A mit einer Zahl λ

$\vec{a}, \vec{b}$ l. unabh. $\Rightarrow \lambda \cdot \vec{a}, \vec{b}$ lin. unabh.





(3) Die Addition (subtrahieren) des Vielfachen einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte)



$\vec{a},\vec{b}$ l. unabh. $\Rightarrow$ $\vec{a}+\lambda\vec{b},\vec{b}$ l. unabh. $(\lambda \neq 0)$

Diese 3 Operationen verwenden wir um aus A eine Matrix A^* zu machen, die den gleichen

Rang wie A besitzt und Δ-Gestalt besitzt.

Bsp: S. 126. A5. 13 a)

Die Op. wenden wir auf die Zeilen von A an.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 3 \\ 4 & 8 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{Ges: } rg(A)$$

$\Downarrow$ $Z1 \Leftrightarrow Z2$ tauschen (1)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 4 & 3 \\ 4 & 8 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \overset{(3)}{Z3 - Z1} \\ Z3+(-1)Z1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow A_2 = \begin{array}{c l} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 8 & 5 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ z4-2z1 \\ (3) \end{array} \end{array}$$

$$\Rightarrow A_3 = \begin{array}{c l} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ z3-z2 \\ z4-z2 \end{array} \end{array}$$

$$\Rightarrow A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^*$$

$$rg(A) = rg(A^*) = \underline{\underline{2}}$$

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \cdot 4$$

$$\Rightarrow A_1 = \begin{array}{c l} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ z2-3z1 \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\Rightarrow A2 = \begin{array}{c l} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & -6 & -24 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ z3-z1 \end{array} \end{array}$$

$$\Rightarrow A3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & -6 & -24 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_4 = A^* = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 0 & -24 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow rg(A) = rg(A^*) = 3$$

5.4.3. Der Gauss'sche Algorithmus zur Rangbestimmung

Der Weg, mit dem man durch Anwendung der 3 Operationen (1), (2), (3) eine Matrix A in Δ-Form A^* bringen kann, ist offensichtlich nicht eindeutig.

Gauss hat einen möglichen Weg festgelegt. Dieser wird als Gauss'scher Algorithmus bezeichnet.