Bsp: 6.3., S. 135

Für welche a ist die Lösungsmenge des GS

$$a x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + a x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 + a x_3 = 0$$

ein VR der Dimension 1

bzw: " " " 2?

Berechnen Sie jeweils die Lösungsmenge!

Lösung:

$$\mathrm{Dim}(\mathcal{L}_{hom}) = n - r$$
$$r = rg(A)$$

Bei uns ist $n = 3$

$\Rightarrow$ wir müssen a bestimmen für die gilt:

$rg(A) = 2 \Rightarrow \mathrm{Dim} = 1$

bzw. $rg(A) = 1 \Rightarrow \mathrm{Dim} = 2$

wir bestimmen den rg(A) in Abhängigkeit von a:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad Z2 \leftrightarrow Z1$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ Z2 - aZ1 \\ Z3 - Z1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$S2 \leftrightarrow S3$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_3 & x_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ \\ Z3 + Z2 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{pmatrix} = A^*}$$

$\Rightarrow$ 1. Fall:

$$\underline{\underline{rg(A) = rg(A^*) = 2}}$$

$$\Leftrightarrow 1 \neq 0 \wedge 1-a \neq 0$$

$$\wedge\ 2-a-a^2 = 0 \mid \cdot(-1)$$

$\Leftrightarrow \quad a \neq 1 \wedge a^2 + a - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad a \neq 1 \wedge a_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$

$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{9/4}$

$= -\frac{1}{2} \pm 3/2 = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad a \neq 1 \wedge (a = 1 \vee a = -2)$

$(\underbrace{a \neq 1 \wedge a = 1}_{F}) \vee (a \neq 1 \wedge a = -2)$

$\Leftrightarrow \quad a \neq 1 \wedge a = -2$

$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{a = -2}}$

Lösungsmenge:

Wir setzen $a = -2$ in das bereits diagonalisierte GS ein:

$$\begin{array}{l} \\ A \\ \Leftrightarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_2 \end{array} \\ \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \\ \hline 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{array} \right) = A^* \end{array}$$

$\Rightarrow \quad x_1 + x_3 - 2x_2 = 0$

$3x_3 - 3x_2 = 0$

$0 = 0$

$\Rightarrow \quad x_2 = \lambda \quad \in \mathbb{R}$

$$x_1 + x_3 = 2\lambda$$
$$3x_3 = 3\lambda$$

$\Rightarrow \quad x_3 = \lambda$

$\Rightarrow \quad x_1 = 2\lambda - x_3 = \lambda$

$\quad\; x_2 = \lambda$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \left\{ \vec{x} \;\middle|\; \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda, \; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

VR der Dim 1

Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Fall: $rg(A) = 1$

$$\ldots \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{pmatrix} = A^*$$

$rg(A) = 1 \iff$

$1 - a = 0 \wedge 1 - a^2 = 0 \wedge 2 - a - a^2 = 0$

$\iff a = 1 \wedge (a = 1 \vee a = -1)$
$\quad \wedge (a = 1 \vee a = -2)$

$\Longleftrightarrow$ $\underline{\underline{a = 1}}$ ist $\dim \mathcal{L} = 3 - 1 = \underline{\underline{2}}$

Lösungsmenge

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_2 \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$\Rightarrow$ $x_2 = \lambda_1$

$x_3 = \lambda_2$

$x_1 = -\lambda_1 - \lambda_2$

$\Rightarrow$ $x_1 = -\lambda_1 - \lambda_2$

$x_2 = \lambda_1$

$x_3 = \lambda_2$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{hom} = \left\{ \vec{x} \;\middle|\; \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_2 ,\ \lambda_1, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

VR der Dim 2 mit

Basis $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

## 6.3 Lösung inhomogener Lin. GS mittels GA

3 Fälle ($\vec{b} \neq \vec{0}$)

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

- $rg(A) = n$: genau eine Lösung (eindeutig)
- $rg(A) = rg(A \vdots \vec{b}) < n$: $\infty$ viele Lösungen
- $rg(A) \neq rg(A \vdots \vec{b})$: keine Lösung.

Bsp 1:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Lösg: Wir müssen nun bei Anwendung des GA auf die Zeilen des GS $A\vec{x} = \vec{b}$ die rechte Seite $\vec{b}$ mit berücksichtigen, die sich ja bei allen Operationen ändert!

$\Rightarrow$ wir wenden den GA

auf $(A \,\vdots\, \vec{b}) =$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ z2 + z1 \\ z3 - 2z1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ z3 + 3z2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

$$A^* \cdot \vec{x} = \vec{b}^*$$

$$rg(A) = rg(A \,\vdots\, \vec{b}) = 3$$

GS:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \quad (1)$$
$$x_2 + 3x_3 = 1 \quad (2)$$
$$5x_3 = 5 \quad (3)$$

von unten nach oben auflösen.

$$\Rightarrow x_3 = \frac{5}{5} = 1$$

$$x_2 = 1 - 3 = -2$$

$$x_1 = -x_2 - 2x_3 = 2 - 2 = \underline{\underline{0}}$$

Da unser GS Diagonalform hat $\left(\Leftrightarrow rg(A) = rg(A|\vec{b}) = n\right)$

ist die Lösung eindeutig

$$\mathcal{L}_{inhom} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

**Bsp 2:**

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Lösung:

$(A \,\vdots\, \vec{b})$

$$= \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ \boxed{-1} & 2 & 1 & 0 \\ \boxed{0} & 3 & 3 & 1 \\ \boxed{2} & 2 & 4 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ Z2 + Z1 \\ \\ Z4 - 2Z1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 = \lambda & \\ \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right. & \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ \boxed{3} \\ \boxed{0} \end{array} & \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{array} & \left.\begin{array}{:c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ Z3 - Z2 \\ \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

$$rg(A) = 2 = rg(A \,\vdots\, \vec{b}) < \underset{=3}{n}$$

$$x_3 = \lambda \qquad (3)$$

$$x_1 + x_2 = \boxed{1} - 2\lambda \qquad (1)$$

$$3x_2 = \boxed{1} - 3\lambda \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \quad x_3 = \lambda$$

$$x_2 = \boxed{\tfrac{1}{3}} - \lambda$$

$$x_1 = 1 - 2\lambda - \tfrac{1}{3} - \lambda$$

$$= \boxed{\tfrac{2}{3}} - 3\lambda$$

$\Rightarrow$ Vektor:

$$x_1 = \frac{2}{3} - 3\lambda$$

$$x_2 = \frac{1}{3} - \lambda$$

$$x_3 = 0 + \lambda$$

wg. $\vec{b} \neq \vec{0}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{inhom} = \left\{ \vec{x} \;\middle|\; \vec{x} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda \quad // \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\vec{p}_0 + \vec{a}\lambda$$

= affiner Raum der Dimension $n - rg(A \mid \vec{b}) = 3 - 2 = \underline{\underline{1}}$

Bsp: $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$

$-x_1 + x_3 = 1$

$-x_1 - x_2 - 2x_3 = 2$

$$(A \,\vdots\, \vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} Z2+Z1 \\ Z3+Z1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$rg(A) = 2 \;\neq\; rg(A \,\vdots\, \vec{b}) = 3$$

Lösungsmenge:

(1) $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 x_3 = 2$

(2) $x_2 + 3x_3 = 1$

(3) $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$

$\Rightarrow$ Da die Zeile (1)

$0 = 2$

keine Lösg hat

ist $\mathcal{L}$ insgesamt $= \emptyset$