Vl. 12.2.14

Lösung der Pprobeklausur 12/13

$\boxed{A10}$

$$ax_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + ax_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + x_2 + ax_3 = 1$$

a) Lösung mit CR bestimmen!

1. Matrixschreibweise

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

$(A \vdots \vec{b})$ ✓

2) CR

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}$$

3) Berechnung der Determinanten

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$= a \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}$$

$$+ 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}$$

$$+ 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a\underbrace{(a^2-1)}_{(a-1)(a+1)} - \underbrace{(a-1) + (1-a)}_{\substack{-a+1 \\ +1-a}}$$

$$-2(a-1)$$

$$= (a-1)\big(\underbrace{a(a+1) - 2}_{a^2+a-2}\big)$$

$$a_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2}$$

$$= -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

$$= (a-1)(a-1)(a+2)$$

Zähler =

X_1:

$$\left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & a \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$= a^2 + 2 - (a + 1 + a)$$

$$= a^2 - 2a + 1$$

$$= (a-1)^2$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\cancel{(a-1)^2}}{\cancel{(a-1)^2}(a+2)}$$

$$= \frac{1}{\underline{\underline{a+2}}}$$

x_2

Zähler: $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2 + 1 + 1 - (1 + a + a)$

$$= a^2 - 2a + 1$$

$$= \underline{\underline{(a-1)^2}}$$

$$x_2 = \frac{(a-1)^2}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{\underline{\underline{a+2}}}$$

x_3: Zähler: $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$= a^2 + 1 + 1 - (a + a + 1)$$

$$= a^2 - 2a + 1$$

$$= \underline{\underline{(a-1)^2}}$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{(a-1)^2}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{\underline{\underline{a+2}}}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{\underline{\underline{a+2}}}$$

b) <u>eindeutig lösbar für:</u>

$|A| \neq 0$ bzw. $rg(A) = 3$

Es gilt:

$|A| = (a-1)^2 \cdot (a+2) \neq 0$

$\Leftrightarrow (a-1) \neq 0 \wedge (a+2) \neq 0$

$\Leftrightarrow a \neq 1 \wedge a \neq -2$

$\curvearrowright$ eindeutig lösbar für

$a \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$

c) Für welche a ist die Lösungsmenge eine Gerade?

$A\vec{x} = \vec{b}$ $\quad \mathrm{Dim}\,\mathcal{L} = n - rg(A)$

$\mathrm{Dim}\,\mathcal{L} = 3 - rg(A) \stackrel{!}{=} 1$

Gerade

$\Rightarrow rg(A) \stackrel{!}{=} 2$

Für welche a ist $rg(A) = 2$?

Es kommen nur $a = 1$, $a = -2$ in Frage!

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xRightarrow{a=1} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow rg(A) = 1$

$\Rightarrow$ ~~$\mathrm{Dim}\,\mathcal{L} = 3 - 1 = 2$~~ $\curvearrowright$ Ebene!

falscher Schluss

Der Satz lautet:

Wenn $A\vec{x}=\vec{b}$ lösbar ist

(d.h. wenn $rg(A)=rg(A \,\vdots\, \vec{b})$)

so ist $\dim \mathcal{L} = n - rg(A)$

Andernfalls, (wenn $rg(A) \neq rg(A \,\vdots\, \vec{b})$)

so ist das GS nicht lösbar!

$\Updownarrow$ wir müssen für jeden der beiden Fälle $a=1, a=-2$ prüfen, ob $rg(A)=rg(A \,\vdots\, \vec{b})$

$$rg(A \,\vdots\, \vec{b}) \underset{a=1}{=} rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$\Rightarrow rg(A) = rg(A \,\vdots\, \vec{b}) = 1$

$\mathcal{L}$ = Ebene

$a=-2$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Rang:

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ Z2 - Z1 \\ Z3 + 2Z1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ Z3 + Z2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad rg(A)=2$$

Aber, wie groß ist $rg(A|\vec{b})$ für $a=-2$:

$$(A \,\vdots\, \vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ Z2-Z1 \\ Z3+2Z1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ Z3+Z2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 3$$

$$\Rightarrow rg(A \,\vdots\, \vec{b}) = 3 \neq rg(A)$$

GS nicht lösbar!

- $A\vec{x} = \vec{b}$
  - eindeutig: $rg(A) = n$ $(|A| \neq 0)$
  - keine Lösung: $rg(A) \neq rg(A|\vec{b})$
  - ∞ viele Lösungen: $rg(A) = rg(A|\vec{b}) < n$, $\mathcal{L}$ affiner R, $\dim \mathcal{L} = n - rg(A)$
- $A\vec{x} = \vec{0}$
  - eindeutig: $\mathcal{L} = \{\vec{0}\}$, $rg(A) = n$
  - ∞ viele L.: $rg(A) < n$, $\mathcal{L}$ = VR der $\dim \mathcal{L} = n - rg(A)$

10d) $A\vec{x} = \vec{b}$

$$(A \mid \vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$$

<u>Fall $a = 1$</u>

$$\Rightarrow rg(A) = rg(A \mid \vec{b}) = rg\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \end{array}\right) = 1$$

Lösungsmenge? $\mathbb{L}$ = Ebene im $\mathbb{R}^3$

da: $\dim \mathbb{L} = n - rg(A) = 2$

Geben Sie <u>Aufpunkt</u>, <u>Richtungsvektoren</u> der Ebene so wie Normalenvektor der Ebene an!

Stellen Sie die Ebene in Normal- und in <u>Punkt-Richtungsform</u> dar!

$a x_1 + x_2 + x_3 = 1$

$\cancel{x_1 + a x_2 + x_3 = 1}$

$\cancel{x_1 + x_2 + a x_3 = 1}$

Unser GS lautet:

$$x_1 + \boxed{x_2 + x_3} = 1$$

Lösen:

$$\left.\begin{array}{l} x_3 = \lambda_1 \\ x_2 = \lambda_2 \end{array}\right\} \text{ beliebig } \in \mathbb{R}$$

$$x_1 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$$

in Vektorschreibweise:

$$\begin{array}{lcl} x_1 & = & 1 - 1\cdot\lambda_1 - 1\cdot\lambda_2 \\ x_2 & = & 0 + 0\cdot\lambda_1 + 1\cdot\lambda_2 \\ x_3 & = & 0 \quad\; 1\cdot\lambda_1 \end{array}$$

$$p = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\lambda_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\lambda_2$$

$\Rightarrow$ Punkt-Richtungsform

$$\mathcal{L} = \left\{ P \;\middle|\; P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

P_0 Aufpunkt

Richtungsvektoren

Normalenvektor:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

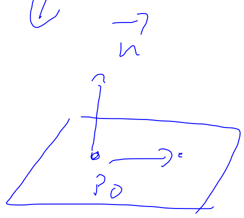
$$\begin{array}{ccc} -1 & & -1 \\ 0 & & 1 \\ 1 & & 0 \end{array}$$

Normalform der Ebene:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

oder

$$-x_1 - x_2 - x_3$$



$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0 P} = 0$$

"$P - P_0$"

$$\Leftrightarrow \quad \vec{n} \cdot \text{"}P\text{"} = \vec{n} \cdot \text{"}P_0\text{"}$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$$

$\boxed{\text{A11)}}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

Lösen Sie folgendes GS

$$\left[A \cdot (D - 3C)\right]^T = B \quad \Big| \, T$$

nach D auf!

$$[A \cdot B]^T \neq A^T \cdot B^T = B^T \cdot A^T$$

$$\underbrace{n \times s \cdot s \times e}_{n \times e} \qquad s \times n \cdot e \times s$$

$$n \times e \;{}^T \qquad [A \pm B]^T = A^T \pm B^T$$

$$e \times n \qquad (A^T)^T = A$$

$$[A\,(D - 3C)]^T = \underbrace{(D-3C)^T}_{(D^T - 3C^T)} \cdot A^T$$

oder:

$$[A \cdot (D-3C)]^T = B \quad | \; T$$

$$\Leftrightarrow A \cdot (D-3C) = B^T \quad | \; A^{-1} \cdot$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{A^{-1} \cdot \cancel{A}}_{\cancel{E}} (D - 3C) = A^{-1} \cdot B^T$$

$$\Leftrightarrow D - 3C = A^{-1} B^T$$

$$\Leftrightarrow D = A^{-1} \cdot B^T + 3 \cdot C$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad |A| = -2$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}{-2}$$

„Faustregel"